APPROCHE POLYEDRALE EN OPTIMISATION COMBINATOIRE

A. Ridha Mahjoub
LAMSADE, Université Paris-Dauphine, Paris, France

Plan

1. **Approche Polyédrale**
   1.1. Introduction
   1.2. Programmation Linéaire et O.C.
   1.3. Polyèdres, faces et facettes
   1.4. Séparation et Optimisation
   1.5. Méthode de coupe
   1.6. Méthode de Branch-and-Cut
   1.7. Génération de colonnes et méthode de Branch-and-Cut-and-Price
   1.8. Polyèdres entiers et relations min-max
2. **Applications**
   2.1. Le problème de coupe maximum
   2.2. Le problème de conception d'un réseau fiable

Plan

1.1. Introduction

Soit E un ensemble fini, $|E|=n$. Soit $c=(c(e), e \in E)$ un vecteur poids associé aux éléments de E.
Soit $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ une famille de sous ensembles de E. Si $F \in \mathcal{F}$ alors

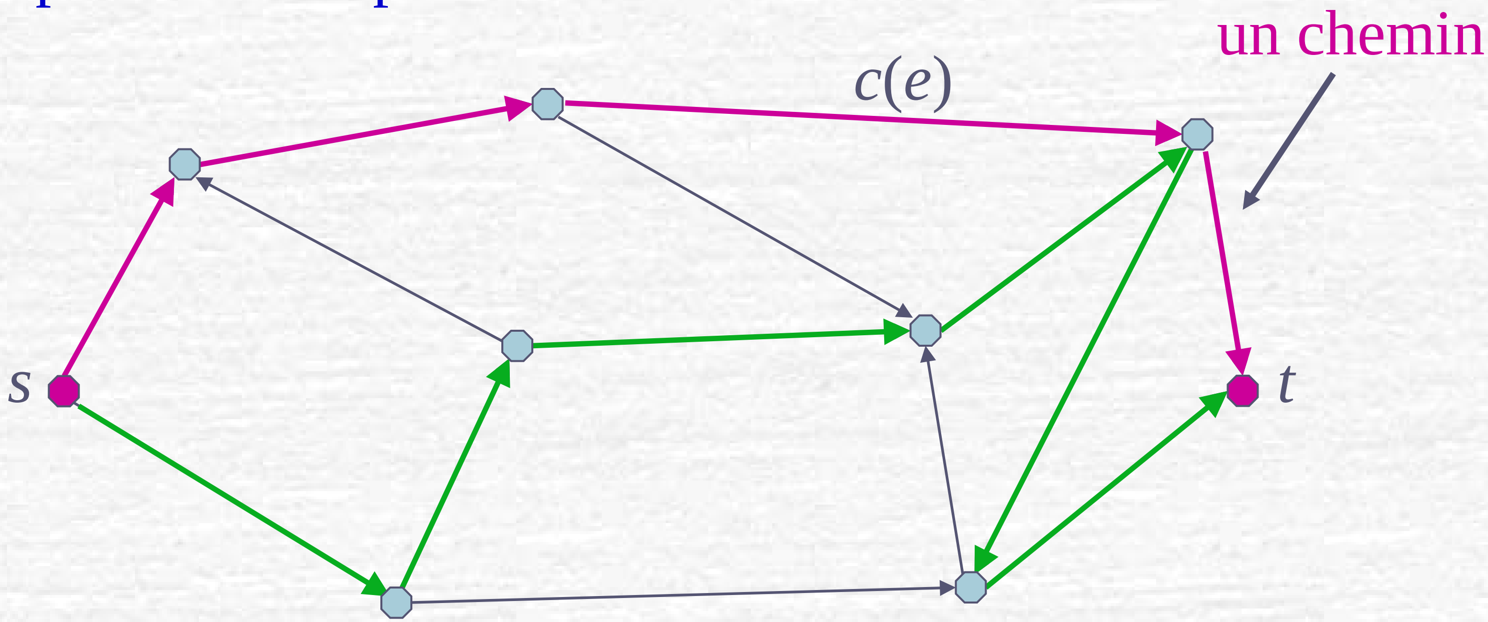
$$c(F)=\sum_{e \in F} c(e)$$

est le poids de F.

Le problème:
Déterminer F^* dans $\mathcal{F}$ tel que $c(F^*)$ soit maximum (minimum)
est appelé problème d'optimisation combinatoire.

Exemples de problèmes d’O.C.

1) Le problème du plus court chemin



E : ensemble des arcs d’un graphe

c : fonction coût sur les arcs

$\mathcal{F}$: ensemble des chemins (entre l’origine et la destination)

2) Le problème d’affectation

N tâches doivent être affectées à *N* employés de telle manière qu’à chaque employé on ne puisse affecter qu’une et une seule tâche.

1.1. Introduction

			j	
	x			
i			c_{ij}	x
tâches		x		
			x	

employés

Le problème est de trouver une affectation de coût minimum

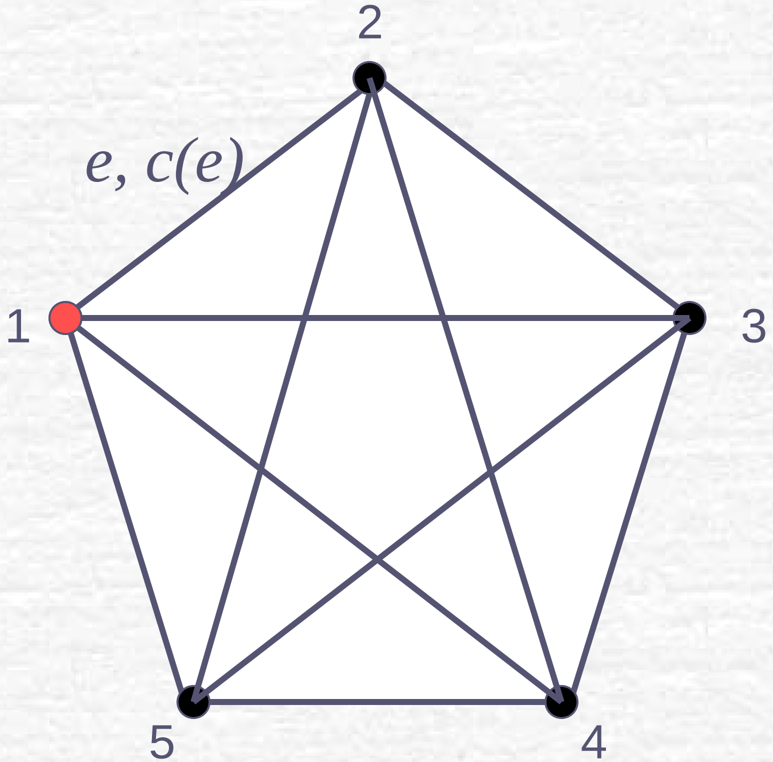
E: ensemble des cases
c: coûts d'affectation
$\mathcal{F}$: ensemble des affectations possibles

x: affectation possible

3) Le problème du voyageur de commerce

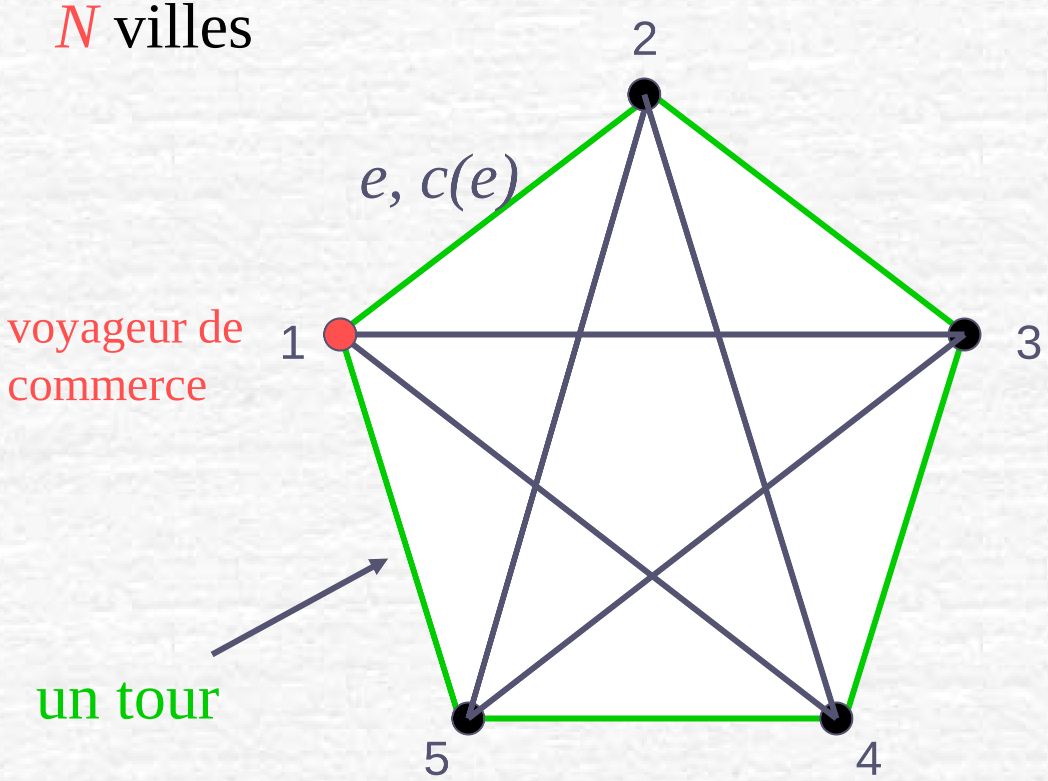
N villes

voyageur de commerce



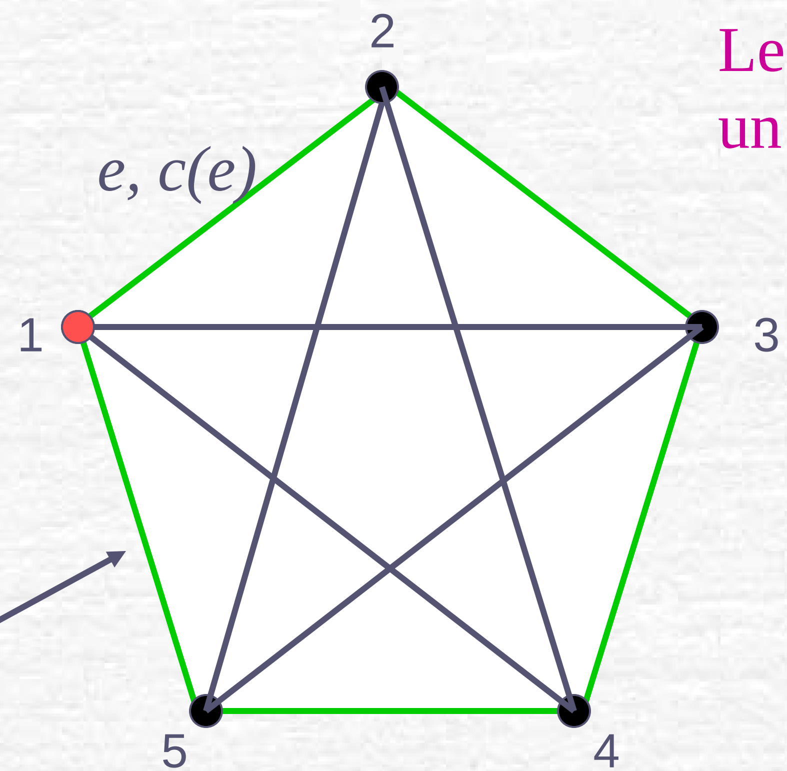
3) Le problème du voyageur de commerce

N villes



3) Le problème du voyageur de commerce

N villes



voyageur de commerce

un tour

Le problème est de trouver un tour de longueur minimum

E: ensemble des liaisons entre les villes

c: distances entre les villes

$\mathcal{F}$: ensembles des tours.

Applications

Production
Transport, télécommunications
VLSI
Informatique
Physique statistique
Biologie
…

Complexité

Méthode énumérative

Enumérer toutes les solutions du problème et en déterminer la meilleure.

Pour le problème du voyageur de commerce sur 30 villes, (et 29! solutions possibles), il faut plus de 100 siècles pour avoir l'optimum.

Complexité: généralement **NP-difficile**

D'où la nécessité de méthodes efficaces de résolution.

1.2. Programmation linéaire et optimisation combinatoire

Un problème d'O.C. est de la forme

$$\mathcal{P}=\max\{c(F)=\sum_{e\in F} c(e),\ F \in \mathcal{F}\}$$

Pour $F\in \mathcal{F}$, on associe un vecteur $x^F \in\{0,1\}^E$, appelé vecteur d'incidence donné par

$$x^F_i= \begin{cases} 1 & \text{si } i \in F \\ 0 & \text{si } i \in E\backslash F \end{cases}$$

Un problème d'O.C. peut être formulé comme un programme en 0-1.

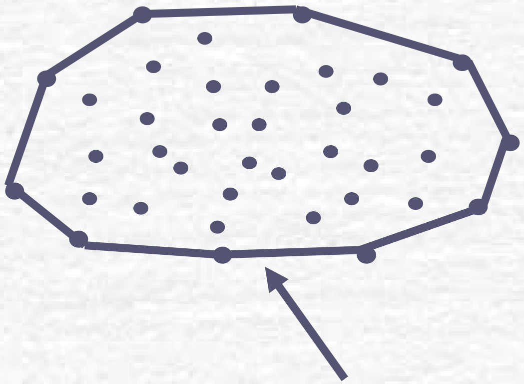
Idée : Ramener le problème à un programme linéaire.

$$\text{Max} \sum c_j x_j$$

sous les contraintes

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i \,, \ \ i = 1, \ldots, m$$

$$x_i \in \{0,1\}, \ \ i = 1, \ldots, n$$



P($\mathcal{P}$)=enveloppe convexe des solutions

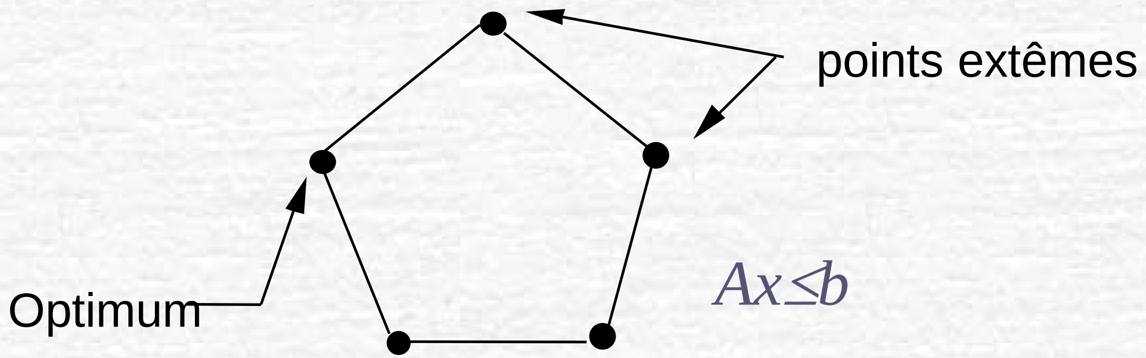
Programme en 0-1

Théorème : (Dantzig, 1947)

Une solution optimale d'un programme linéaire

$$\begin{array}{l}\text{Max } cx \\ Ax \leq b\end{array}$$

peut être prise parmi les points extrêmes du polyèdre défini par ses contraintes



Un problème d'O.C. peut être formulé comme un programme en 0-1.

Idée : Ramener le problème à un programme linéaire.

$$\text{Max} \sum c_j x_j$$

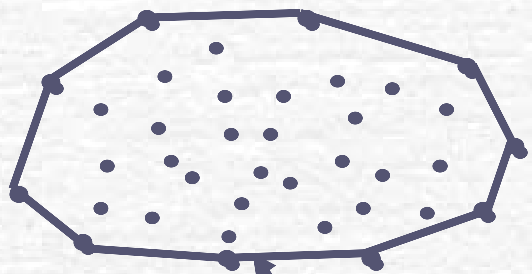
sous les contraintes

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i \;, i=1,\ldots,m$$

$$x_i \in \{0,1\},\ \ i = 1,\ldots,n$$

Nouvelles contraintes

$$x_i \geq 0,\ i=1,\ldots,n$$



$P(\mathcal{P})$=enveloppe convexe de S

Programme linéaire

$$\mathcal{P} = \max\{cx^F, F \in \boldsymbol{F}\} \leq \max\{cx, x \in P(\mathcal{P})\} \leq \max\{cx^F, F \in \boldsymbol{F}\}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{P} \Leftrightarrow \max\{cx, x \in P(\mathcal{P})\}$$

Approche polyèdrale

Soit $\mathcal{P}$ un problème d'O.C. sur un ensemble E, $|E|=n$.

1. Représenter les solutions de $\mathcal{P}$ par des vecteurs en 0-1.
2. Considérer ces vecteurs comme des points de R^n, et définir l'enveloppe convexe $P(\mathcal{P})$ de ces points.
3. Caractériser $P(\mathcal{P})$ par un système d'inégalités linéaires.
4. Appliquer la programmation linéaire pour résoudre le problème.

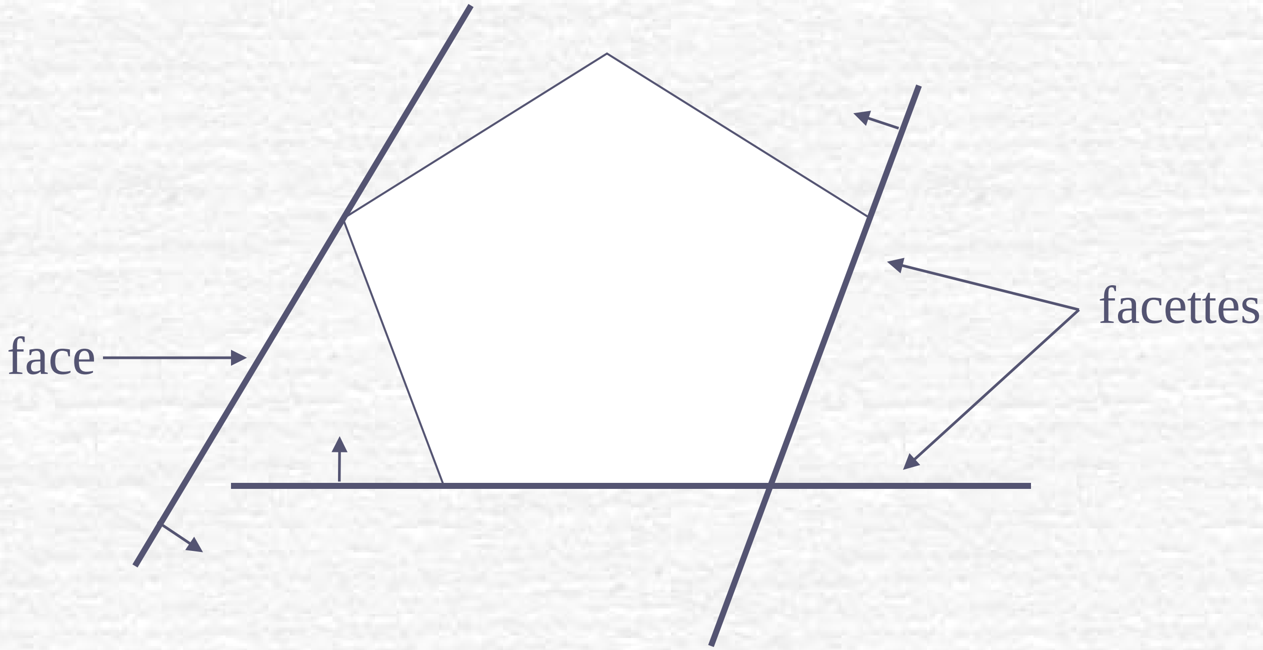
L'approche est initiée par Jack Edmonds en 1965 pour le problème du couplage.

L'étape **3.** est la plus difficile.

1.3. Polyèdres, faces et facettes

Facettes

Ce sont les hyperplans d’appui du polyèdre (les faces maximales)



1.3. Polyèdres, faces et facettes

<u>Difficulté:</u> Le nombre de contraintes (facettes) du polyèdre des solutions peut être exponentiel.

Problème du voyageur de commerce:

Pour 120 villes,
le nombre de contraintes (nécessaires) est $\geq 10^{179}$
($\cong 10^{100}$ fois le nombre des atomes dans le globe)
(nombre de variables: 7140)

Pour résoudre le problème du voyageur de commerce à 120 villes (Grötschel 1977), seulement 96 contraintes parmi 10^{179} contraintes étaient utilisées.

1.3. Polyèdres, faces et facettes

- Si le problème est polynomial, il est « généralement » possible de caractériser le polyèdre associé par un système d'inégalités linéaires.

- Si le problème est NP-complet, il y a peu d'espoir de trouver de telle description. Une caractérisation partielle dans ce cas peut être suffisante pour résoudre le problème

Question: Comment résoudre le problème quand le problème est NP-complet (le nombre de contraintes est exponentiel).

1.4. Séparation et Optimisation

A un système linéaire

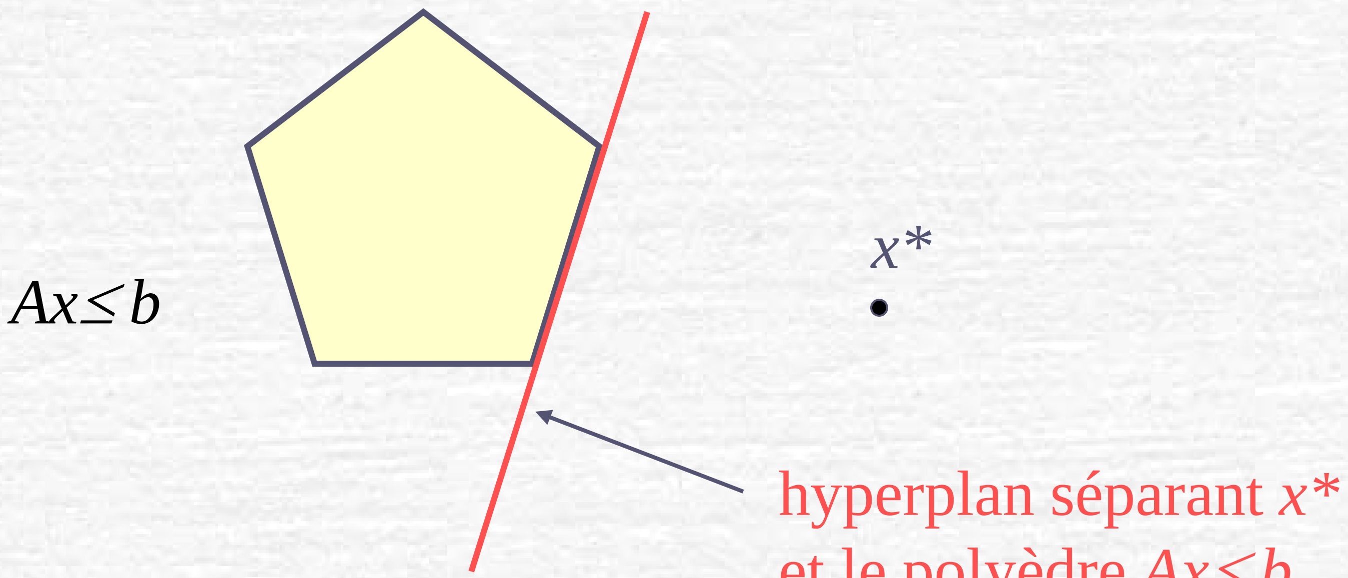
$$Ax \leq b$$

On peut associer le problème suivant:

Pour une solution donnée x^*, vérifier si x^* satisfait $Ax \leq b$,
et sinon déterminer une contrainte de $Ax \leq b$ qui soit violée par x^*.

Ce problème est appelé problème de séparation associé à $Ax \leq b$.

Si x^* ne vérifie pas le système $Ax \leq b$ alors il exite un hyperplan séparant x^* et le polyèdre $Ax \leq b$.



Théorème: (Grötschel, Lovász, Schrijver, 1981)

Etant donné un programme linéaire

$$P = \max\{cx,\ Ax \leq b\},$$

il existe un algorithme polynomial (en n où n est le nombre de variables) pour P si et seulement s'il existe un algorithme polynomial (en n) pour résoudre le problème de séparation associé à $Ax \leq b$.

1.5. Méthode de coupes

Considérons un problème d'O.C. $\mathcal{P}$. Soit

$$P(\mathcal{P})=\{x \in R^n \mid Ax \leq b\}.$$

Donc

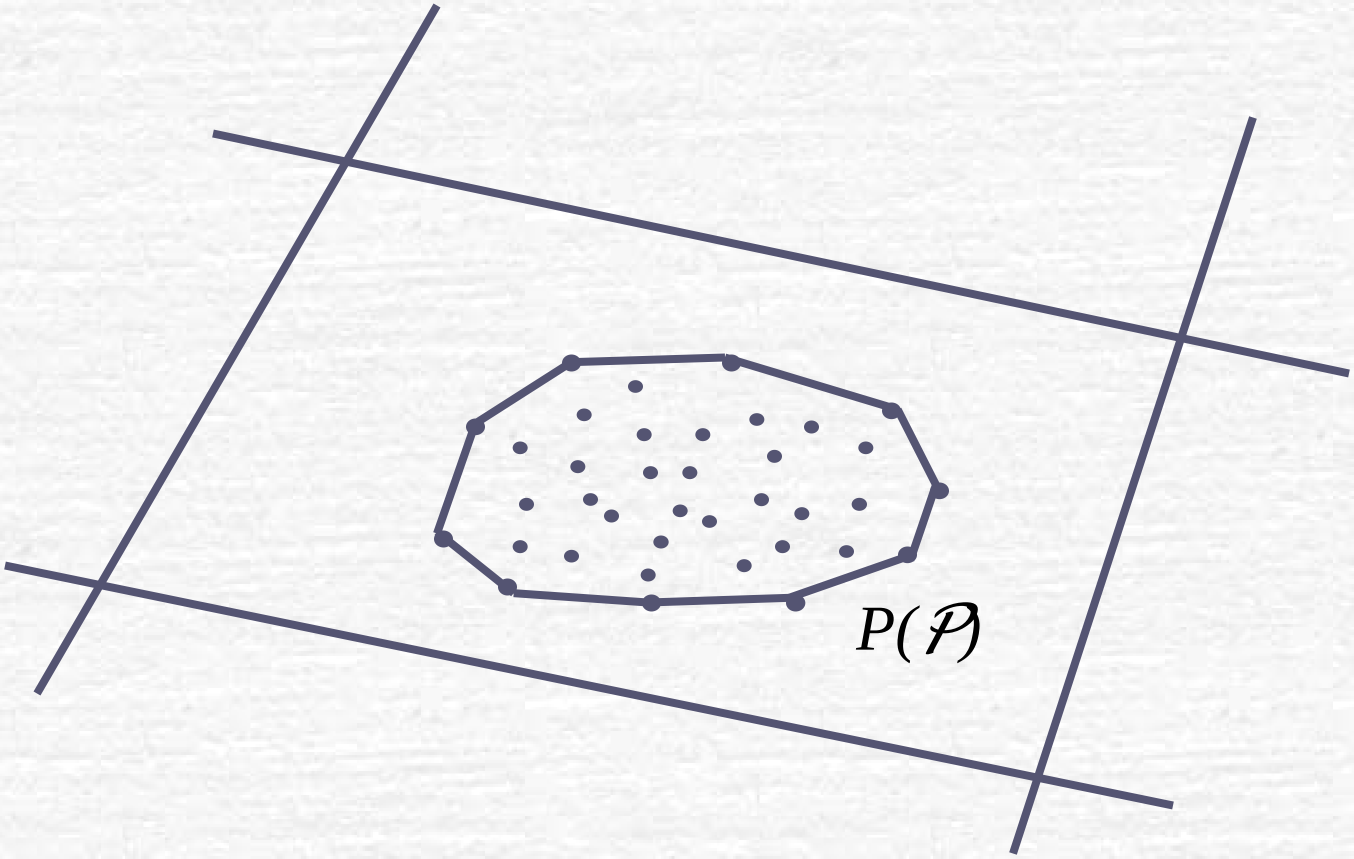
$$\mathcal{P} \Leftrightarrow \max\{cx, Ax \leq b\}.$$

Supposons que le problème de séparation associé à $Ax \leq b$ est polynomial.

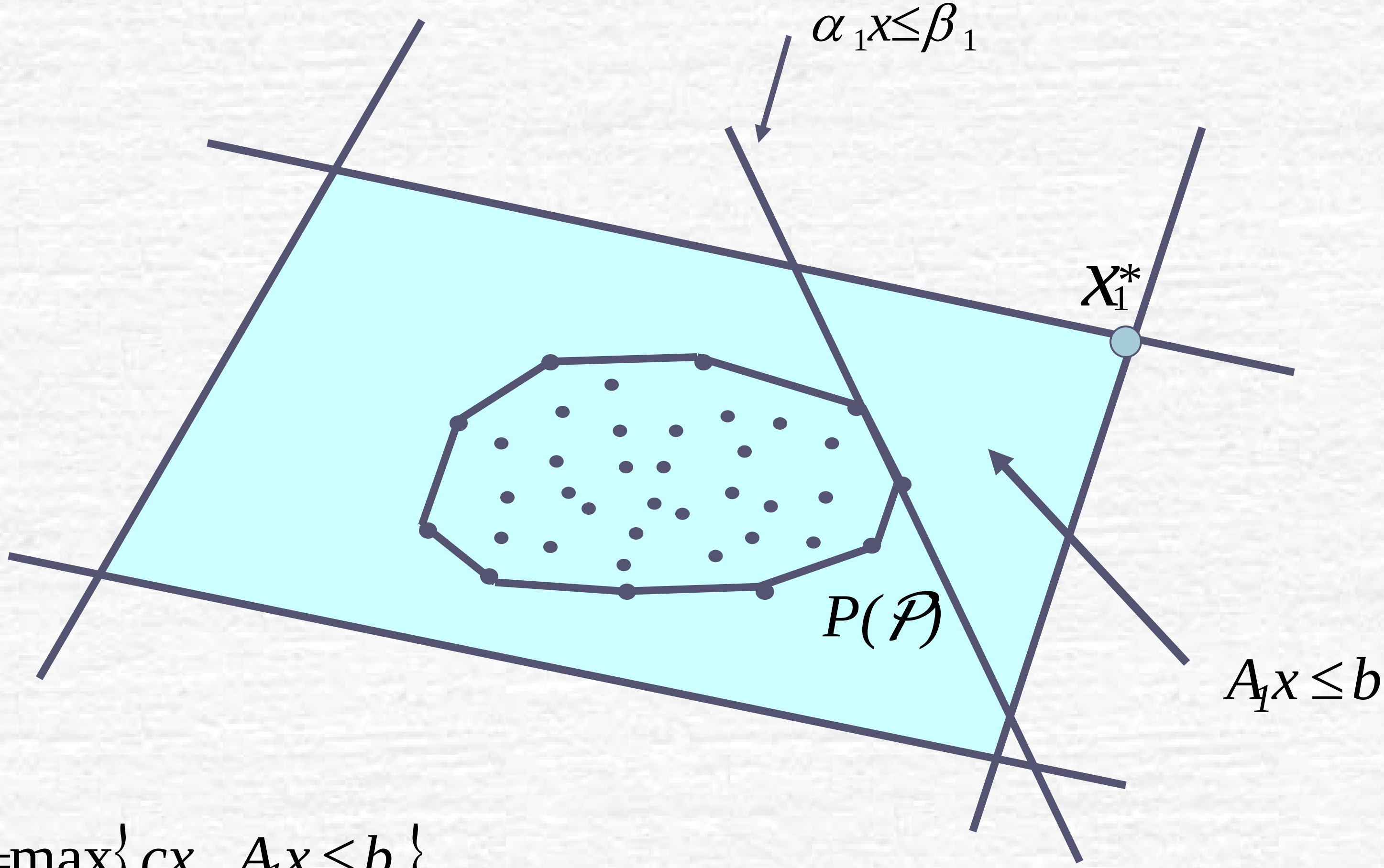
La méthode:

1. Considérer un programme linéaire ayant un nombre raisonnable de contraintes parmi les contraintes de $Ax \leq b$. Soit
$$\mathcal{P}_1 = \max\{cx, A_1x \leq b\}.$$
ce programme.
2. Résoudre $\mathcal{P}_1$. Soit x^*_1 la solution optimale de $\mathcal{P}_1$.
   Si x^*_1 est solution de $\mathcal{P}$ (en 0-1), STOP, x^*_1 est solution optimale de $\mathcal{P}$.
   Sinon, résoudre le problème de séparation associé à $Ax \leq b$ et x^*_1.
   Soit $\alpha_1 x \leq \beta_1$ une contrainte violée par x^*_1.
3. Rajouter $\alpha_1 x \leq \beta_1$ à $\mathcal{P}_1$. Soit
$$\mathcal{P}_2 = \max\{cx, A_1x \leq b, \alpha_1 x \leq \beta_1\}.$$
Résoudre $\mathcal{P}_2$. Si x^*_2 est solution de $\mathcal{P}$, STOP. Sinon, déterminer une contrainte violée par x^*_2 et ainsi de suite.

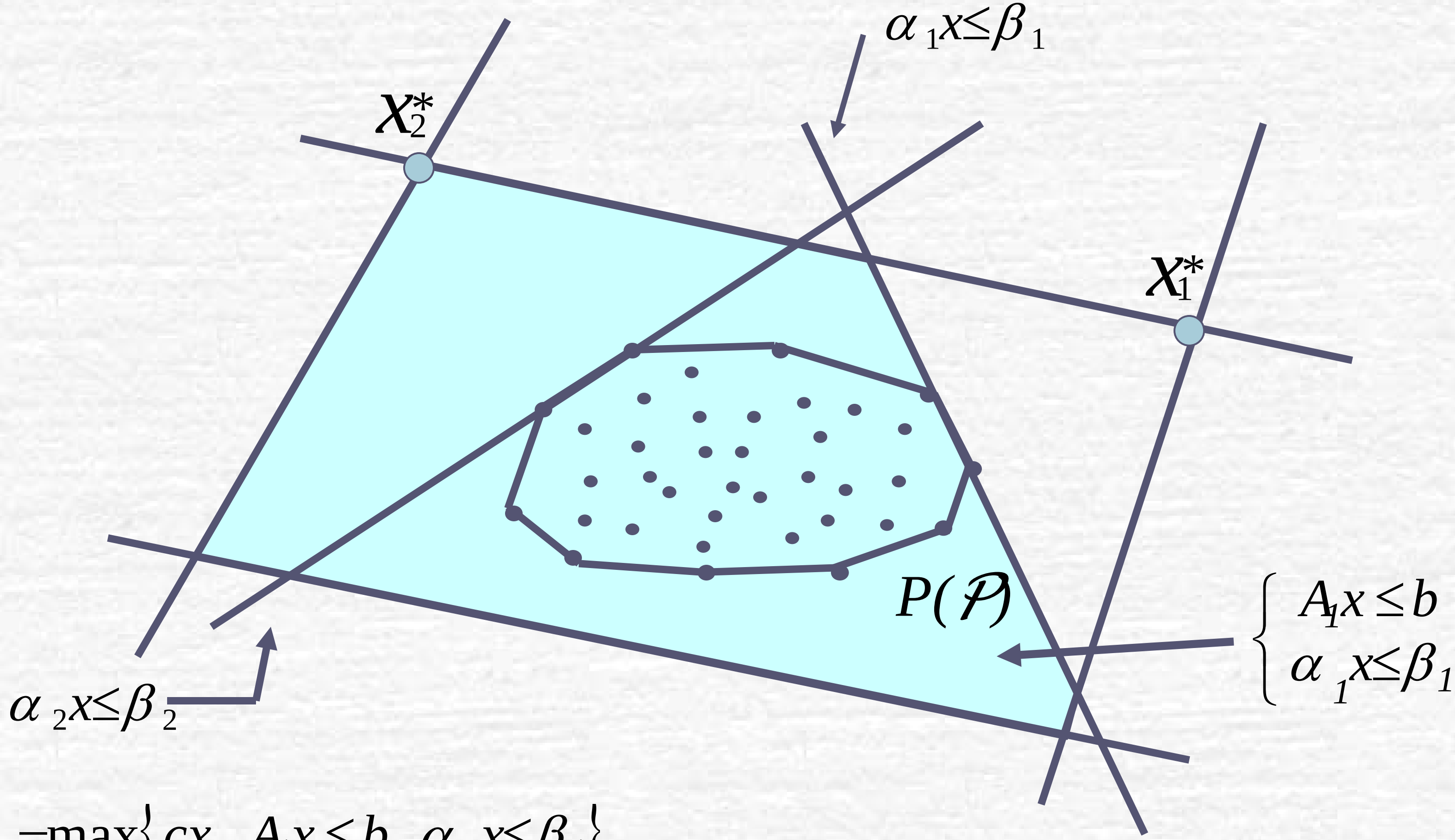
1.3. Cutting plane method



1.3. Cutting plane method

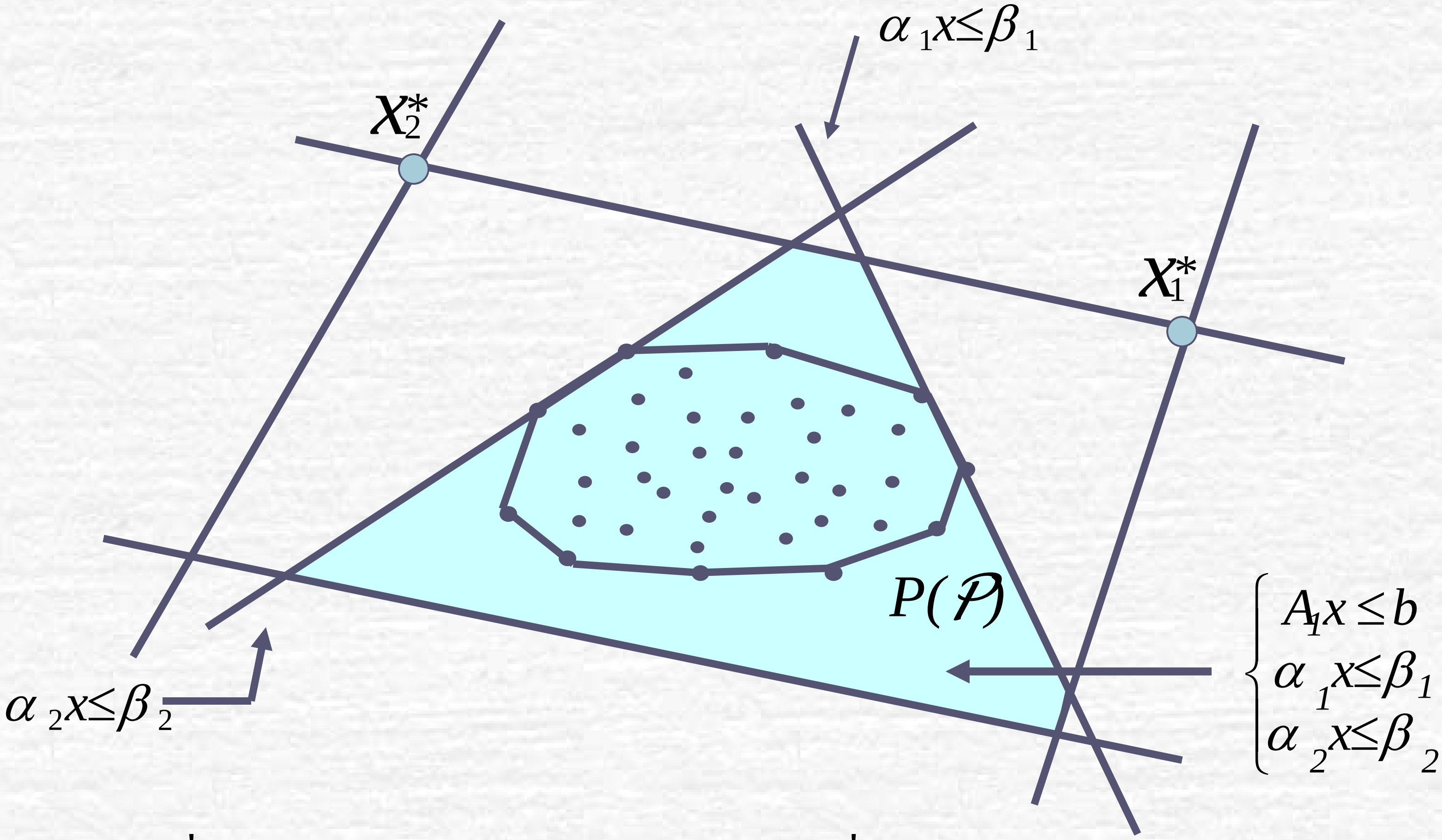


$$P_1 = \max\{cx,\ A_1 x \leq b\}$$



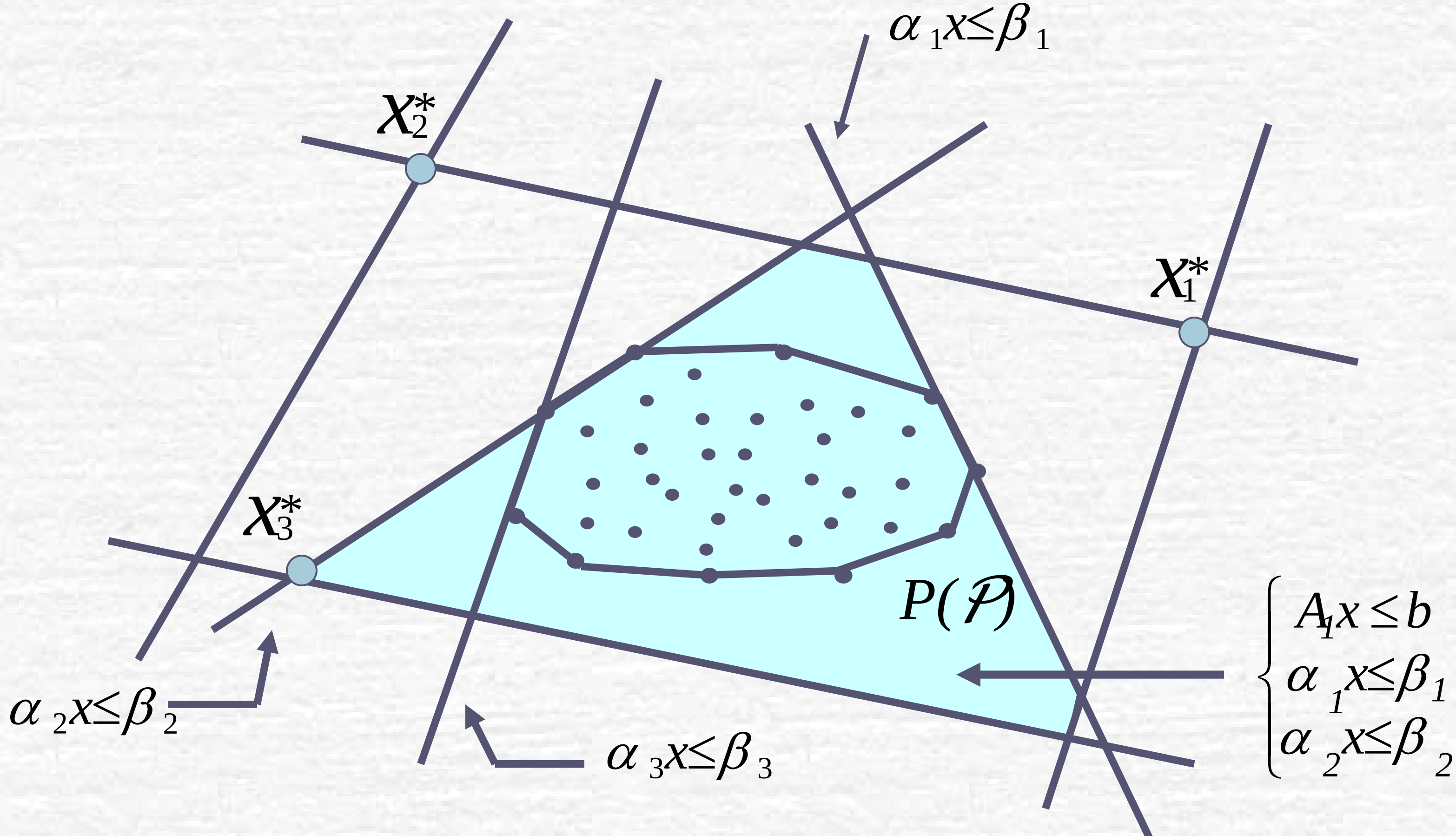
$$P_2 = \max\{cx,\ A_1 x \leq b,\ \alpha_1 x \leq \beta_1\}$$

1.3. Cutting plane method



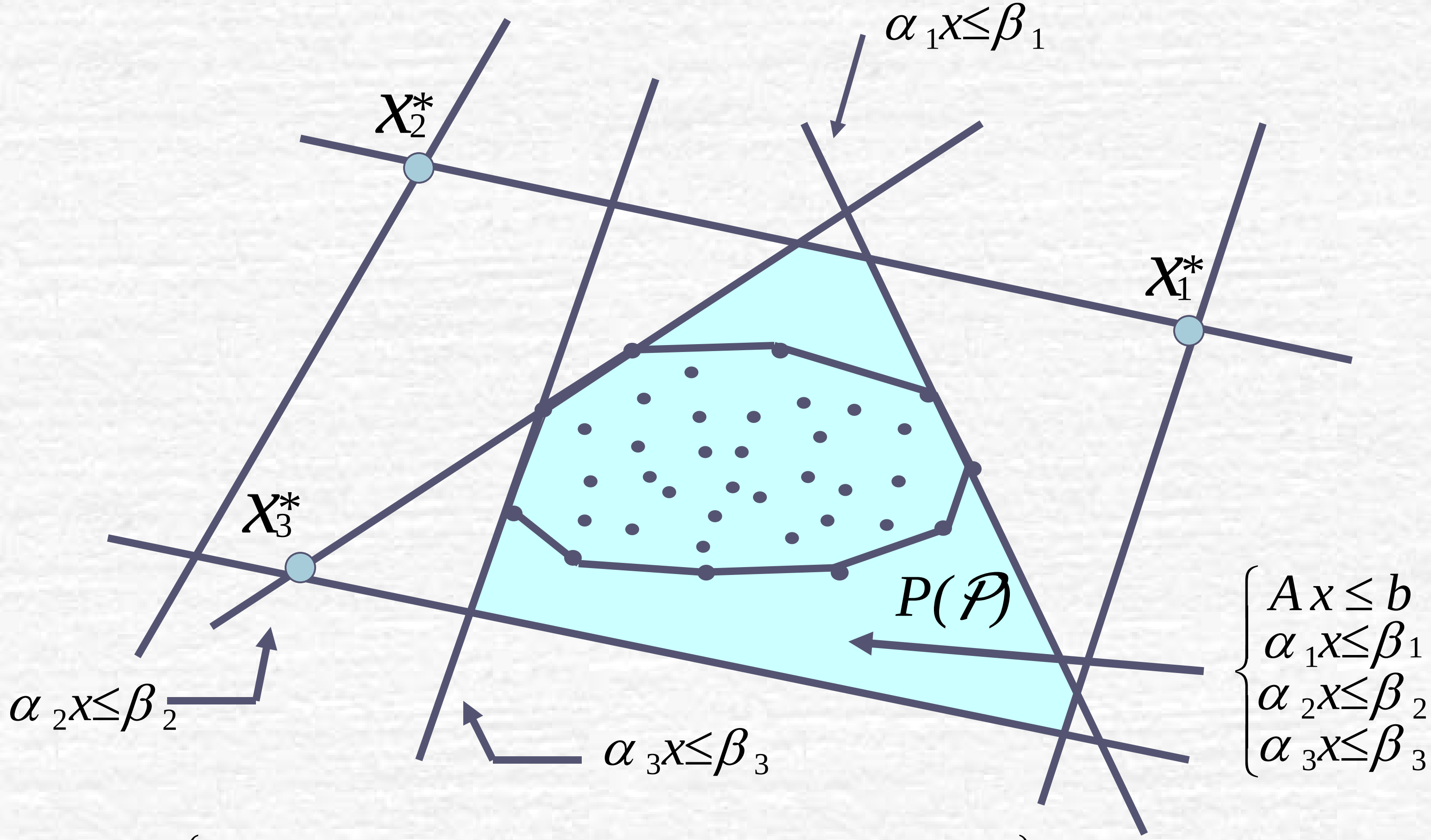
$$P_3 = \max\{cx,\ A_1 x \leq b,\ \alpha_1 x \leq \beta_1,\ \alpha_2 x \leq \beta_2\}$$

1.3. Cutting plane method



$$P_3 = \max\{cx,\ A_1 x \leq b,\ \alpha_1 x \leq \beta_1,\ \alpha_2 x \leq \beta_2\}$$

1.3. Cutting plane method



$$P_4 = \max\{ cx,\ Ax \le b,\ \alpha_1 x \le \beta_1,\ \alpha_2 x \le \beta_2,\ \alpha_3 x \le \beta_3 \}$$

1.6. Méthode de Branch&Cut

(Padberg, Rinaldi, 1991)

1) Une méthode arborescente.

2) Au niveau de chaque sommet de l'arbre de résolution, on résout une relaxation linéaire par la méthode de coupes.

3) Si la solution est réalisable pour $\mathcal{P}$, (ou si elle est $\leq$ à une solution connue), le sommet est déclaré stérile.

4) Si tous les sommets pendants sont stériles, STOP, la meilleure solution trouvée est optimale.

5) Sinon, choisir un des sommets pendants non stériles, sélectionner une variable fractionnaire x_i, et considérer deux sous problèmes en fixant x_i à 1 et x_i à 0 (phase de branchement).

6) Résoudre chaque sous problème en générant de nouvelles contraintes violées (phase de coupe).
Aller en 3).

Problème du voyageur de commerce

année		# villes	# variables	# contraintes rajoutées
1954	Dantzig et al.	49	1176	25
1977	Grötschel	120	7140	96
1980	Crowder et al.	318	50403	177
1987	Padberg, Rinaldi	532	141246	283
1987	Padberg, Rinaldi	2492	2 859 636	9850
1988	Grötschel, Holland	1000	499500	12
1988	Grötschel, Holland	666	221445	1521
1999 ...	Applegate et al.	des milliers	...	...

Remarques:

- L'approche polyèdrale (Branch&Cut) est très puissante pour résoudre des problèmes NP-durs. Elle permet aussi de prouver la polynomialité du problème.

- Il est généralement difficile de trouver des algorithmes de séparation polynomiaux. Des heuristiques dans ce cas peuvent parfois être performantes.

- Quand le nombre de variables est très grand, on peut combiner un algorithme de Branch&Cut avec une méthode de génération de colonnes .

Allocation de fréquences, Problèmes de tournées…

1.6. Branch&Cut

- Un algorithme de Branch & Cut peut être également combiné avec une technique de Lift & Project pour mieux serrer la relaxation linéaire.

- On peut utiliser une heuristique (pas très coûteuse) pour calculer une solution réalisable du problème, et obtenir une borne sup (ou inf) du problème. Cela permet de déterminer une solution très proche de l’optimum.

Logiciels

- Cplex, Xpress, COIN, SCIP

- Abacus, BCP,

1.7. Génération de colonnes et Branch-and-Cut-and-Price

La génération de colonnes est utilisée pour résoudre des programmes linéaires dont le nombre de variables est très grand

Soit le porgramme

$$\begin{aligned} &\text{Min } cx \\ &Ax \geq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Supposons que le nombre de variables n est trop grand.
On résoud un programme maître avec un nombre n' restreint de variables.
Il faut que ce programme initial ne soit pas irréalisable.

Le problème restreint PR_k s'écrit:

$$\begin{aligned} &\text{Min } cx \\ &A'x \geq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Soit u_i the dual variable of inequality i.
Le coût réduit de la variable x_j s'écrit:

$$c^*_j = c_j - \sum A_{ij}\, u_i$$

Si le coût réduit est non-négatif pour toute variable, alors la solution courante est optimale.

1.7. Branch-and-Cut-and-Price

Sinon, on rajoute une ou plusieurs colonnes ayant un coût réduit Négatif, et on résout le nouveau programme restreint PR_{k+1}.

Le problème permettant de vérifier les coûts réduits s'appelle problème esclave (pricing problem).

Un algorithme de Branch-and-Cut-and-Price est un algorithme qui combine un algorithme de branch-and-Cut et une technique de génaration de colonnes.

Un algorithme de Branch-and-Price est un algorithme qui combine un algorithme de Branch-and-Bound et une technique de génération de colonnes.

1. 8. Polyèdres entiers et relations min-max

Soient P_1 un problème d'O.C., et $\{Ax \le b, x \ge 0\}$, un système qui décrit le polyèdre de P_1. Alors

$$P_1 \Leftrightarrow \max\{cx, Ax \le b, x \ge 0\}.$$

Si le dual de P_1,

$$D_1 = \min\{b^T y, yA \ge c, y \ge 0\},$$

représente un problème d'optimisation combinatoire P_2, alors on obtient une relation de la forme:

$$\max\{c(F), F \in \boldsymbol{F_1}\} = \min\{b(F), F \in \boldsymbol{F_2}\},$$

où $\boldsymbol{F_1}$ et $\boldsymbol{F_2}$ sont les ensembles de solutions de P_1 et P_2.

Matrices totalement unimodulaires (TU)

Ce sont les matrices telles que le déterminant de toute sous matrice est 0, 1 ou -1.

Théorème: (Hoffman, Kruskal, 1956)
Une matrice m x n A, est TU si et seulement si pour tout vecteur entier $b \in R^m$, le polyèdre $\{x \in R^n, Ax \leq b, x \geq 0\}$ est entier.

Exemples:

- La matrice d'incidence sommets-arêtes d'un graphe biparti est TU ($\Rightarrow$ Th. de König pour les couplages).

- La matrice d'incidence sommets-arcs d'un graphe orienté est TU ($\Rightarrow$ Th. de flot max-coupe min).

Systèmes totalement duaux entiers (TDE)

Un système est TDE si pour tout vecteur entier $c \in R^n$ tel que le programme linéaire $\max\{cx, Ax \leq b\}$ admet une solution optimale, alors le programme dual correspondant possède une solution optimale entière.

Théorème: (Edmonds, Giles, 1977)
Si $Ax \leq b$ est TDE et b est entier, alors le polyèdre $\{x \in R^n, Ax \leq b\}$ est entier.

Si $Ax \leq b$ est TDE et b est entier, alors le programme $P = \max\{cx, Ax \leq b\}$ admet une solution optimale entière.
Si c est entier, alors le dual de P, D possède une solution entière.
$\Rightarrow$ une relation combinatoire min-max.

Exemple:

Soit $G=(V,E)$ un graphe orienté.
Le problème du sous graphe acyclique maximum dans G est équivalent au programme en nombres entiers:

$$\begin{array}{llll} & & \text{Max } cx & \\ (1) & x(C) \leq |C|-1 & \forall\, C \text{ circuit de } G \\ (2) & 0 \leq x(e) \leq 1 & \forall e \in E \\ & x(e) \in \{0,1\} & \forall e \in E \end{array}$$

Théorème: (Lucchesi, Younger 1978)
Si G est planaire, alors le système (1),(2) est TDE.

Théorème: (Lucchesi, Younger 1978)
Si *G* est planaire alors le nombre minimum d'arcs qui couvrent tous les circuits (feedback set) de *G* est égal au nombre maximum de circuits disjoints .

Ce théorème a été généralisé par Barahona, Fonlupt, M. (1994) aux graphes non-contractibles à $K_{3,3}$.

Plan

1. **Approche Polyédrale**

2. **Applications**

   2.1. Le problème de coupe maximum

      2.1.1. Modèles de verres de spins

      2.1.2. Contraintes valides

      2.1.3. Dimension et facettes

      2.1.4. Séparation

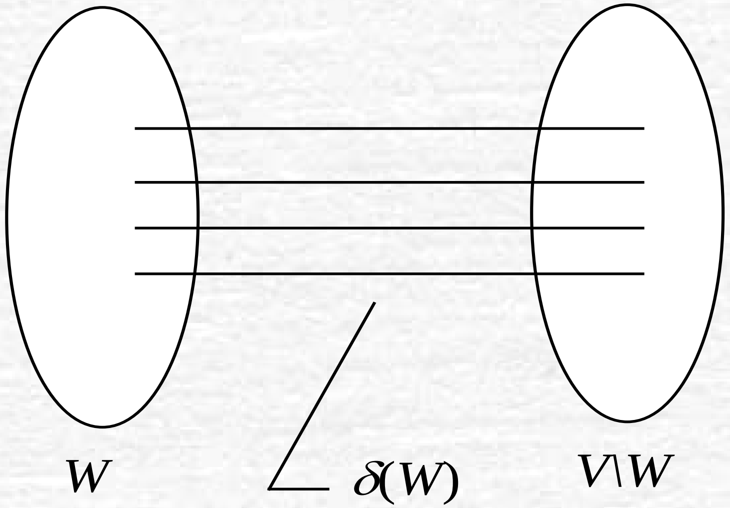
      2.1.5. Graphes sans K_5

      2.1.6. Branch&Cut

   2.2. Le problème de conception d’un réseau fiable

2.1. Le problème de coupe maximum

Soit $G=(V,E)$ un graphe. Soit $W \subseteq V$.



$\delta(W)$ est appelée *coupe* de G.

Etant donnés des poids sur les arêtes de G, le problème de coupe maximum est de déterminer une coupe dans G de poids maximum.

If each edge $e \in E$ has a weight $c(e)$, the Max-Cut problem consists of determining a cut whose weight is maximum.

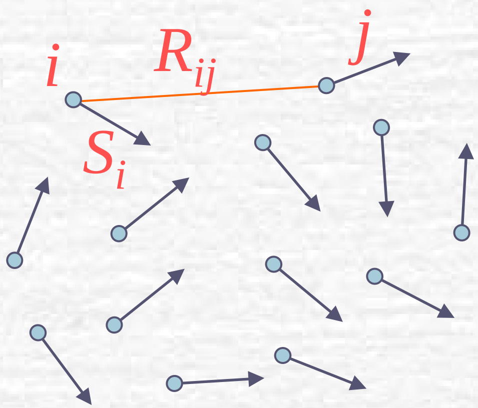
The problem is closely related to the *Bipartite Subgraph problem.*

The problem is NP-hard in general (Karp 1972). It is even NP-hard in the almost planar graphs, that is graphs G such that G-v is planar for some node v (Barahona 83).

Polynomial cases:

- Planar graphs (Hadlocl 1975 (reduced to a matching problem)
- Graphs non contractible to K_5.
- for some special weight systems

2.1.1. Modèles de verres de spins



- n atomes
- chaque atome i possède un moment magnétique appelé spin, représenté par un vecteur S_i
- entre chaque paire d'atomes, i, j, il existe une énergie d'interaction:

$$J(R_{ij})\ S_iS_j$$

où R_{ij} est la distance entre i et j.

L'énergie totale du système est:

$$H = \sum J(R_{ij})\ S_i S_j$$

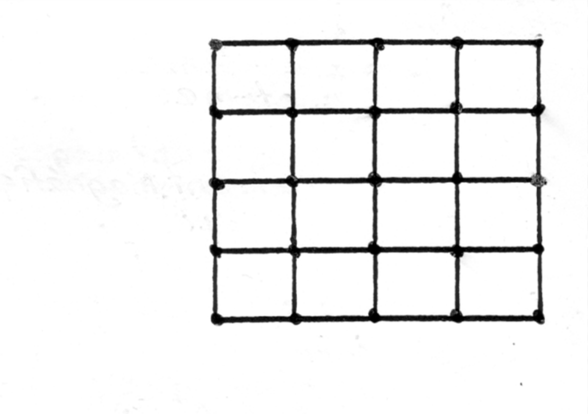
Le système est dit dans son état fondamental si *H* est minimum.

Question:

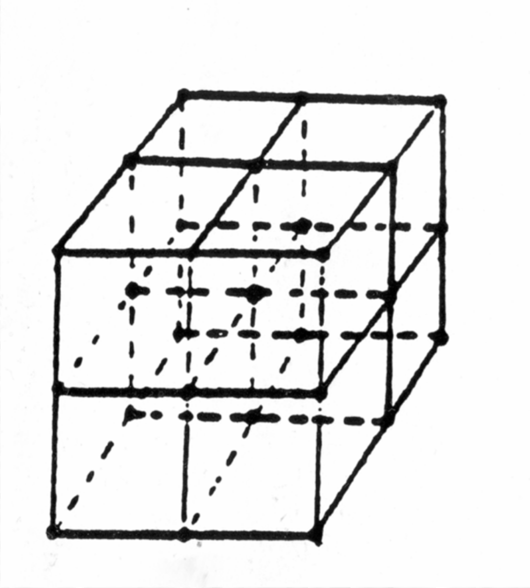
Comment orienter les spins de telle manière que l'énergie *H* soit minimum?

Trois Simplifications

1)



maillage carré



maillage cubique

2) Les spins sont des vecteurs unidimensionnels qui prennent les valeurs +1 et -1.

3) Les interactions ne sont possibles qu'entre les voisins les plus proches.

Donc l'énergie totale peut s'écrire:

$$H = \sum J_{ij} S_i S_j$$

où S_{i} = +1 ou -1

J_{ij} est une constante

Question:

Comment affecter +1 et -1 aux spins S_i de telle manière que l'énergie H soit minimum?

2.1.1. Verres de spins

Les physiciens se posent aussi la question:

comment calculer la fonction de partition

$$f(T) = \sum_{S \in C} \exp\left({H(S)}/{KT} \right)$$

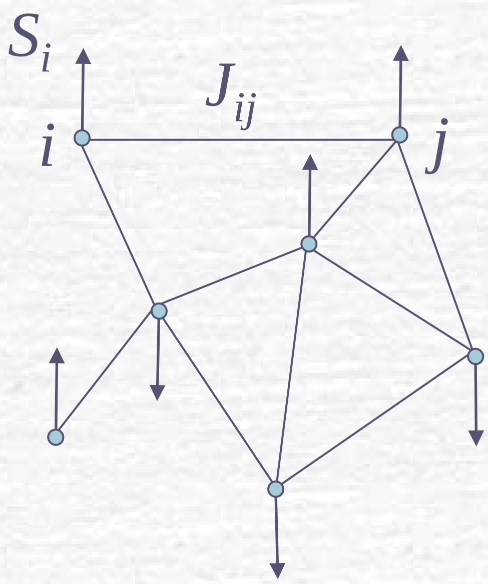
où C est l'ensemble des configurations de spins, K est la constante de Boltzmann et T la température

En 1944 Onsager a donné une méthode de calcul pour la grille carrée (Prix Nobel).

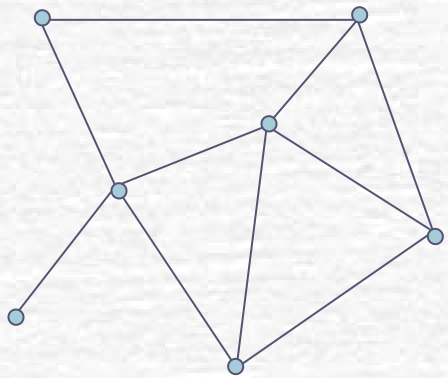
En 1970 Temperely a montré que la calcul de *f(T)* se ramène au problème de dénombrement des couplages parfaits dans un graphe planaire.

Modèles de verre de spins et coupes max

A un système de verres de spins on peut associer un graphe:



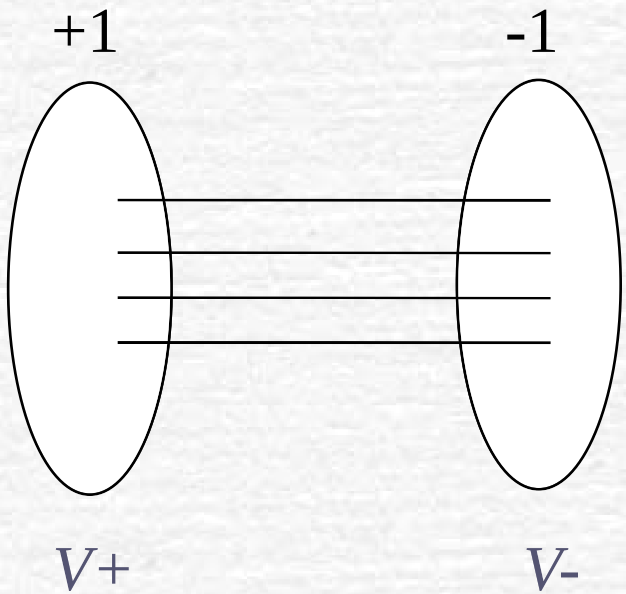
Système de verre de spins



Graphe associé

Pour une affectation de +1 et -1 aux S_i, considérons la partition des sommets, $V_+=\{i \mid S_i=+1\}$, $V_-=\{i \mid S_i= -1\}$.

2.1.1. Verres de spins



$$
\begin{aligned}
H &= \sum_{ij} J_{ij} S_i S_j \\
&= \sum_{i,j \in V+} J_{ij} + \sum_{i,j \in V-} J_{ij} - \sum_{\substack{i \in V+ \\ j \in V-}} J_{ij} \\
&\quad + \sum_{\substack{i \in V+ \\ j \in V-}} J_{ij} - \sum_{\substack{i \in V+ \\ j \in V-}} J_{ij} \\
&= \sum_{ij} J_{ij} - 2 \sum_{\substack{i \in V+ \\ j \in V-}} J_{ij}
\end{aligned}
$$

Donc minimiser $H \Leftrightarrow$ maximiser $\sum_{\substack{i \in V+ \\ j \in V-}} J_{ij}$

Par conséquent le problème du verre de spins est équivalent au Problème de coupe maximum dans le graphe associé.

Le problème de coupe maximum est NP-complet dans le cas général.

Il est polynomial dans les graphes planaires (Hadlock 1975).

Soit $P_c(G)$ le polytope des coupes de G.

2.1.2. Contraintes valides

Si C est un cycle et $\delta(W)$ est une coupe, alors $|C \cap \delta(W)|$ est pair.
D'où les contraintes valides:

(3) $x(F) - x(C \backslash F) \leq |F|-1,$ $\forall$ cycle $C \subseteq E$,
et $\forall\ F \subseteq C$, $|F|$ impair,

(4) $0 \leq x(e) \leq 1,$ $\forall\ e \in E$.

Les contraintes (3) sont appelées *contraintes de cycle*.

Théorème: (Barahona, M., 1986)
Le problème de séparation pour les contraintes de cycle peut être résolu en temps polynomial. (Il se ramène au problème du plus court chemin.)

Le problème de coupe maximum peut être résolu en temps polynomial dans les graphes G où $P_c(G)$ peut être décrit par les les contraintes (3) et (4).

Complete subgraph inequalities:

Consider a graph $G=(V,E)$ and let $(W,E(W))$ be a complete subgraph of G of order $p \geq 3$. Then the inequality

$$x(E(W)) \leq \lfloor p/2 \rfloor \lceil p/2 \rceil$$

is valid for $P(G)$.

Bicycle wheel inequalities:

A graph G=(V,E) is called a bicycle p-wheel if G consists of a cycle of length p and two nodes that are adjacent to each other and to every node in the cycle.

Consider a graph G=(V,E) and let (W,K) be a bicycle (2k+1)-wheel, $k \geq 1$. Then the inequality

$$x(K) \leq 2(2k+1)$$

is valid P(G).

2.1.3. Dimension and facets

Theorem: *The cut polytope is full dimensional.*

Let PB(G) be the bipartite subgraph polytope, that is

$$\mathrm{PB}(G) = conv\{x^F \in R^E \mid F \text{ is a bipartite edge set of } G\}.$$

Theorem: *Given a complete subgraph (W, E(W) of G of order $p \geq 3$, the corrsponding inequality*

$$x(E(W)) \leq \lfloor p/2 \rfloor \lceil p/2 \rceil$$

is vlid for PB(G), and defines a facet of PB(G) if and only if p is odd.

Theorem: *The cut polytope is full dimensional.*

Theorem: *A trivial inequality* $0 \leq x(e)$ ($x(e) \leq 1$) *defines a facet of P(G) if and only if e is not in a triangle.*

Theorem: *A cycle inequality*

$$x(F) - x(C \backslash F) \leq |F|-1$$

defines a facet of P(G) if and only if C is a chordless cycle.

Theorem: *Let G=(V,E) be a graph and (W,K) a bicycle* $(2k+1)$*-wheel with* $k \geq 1$ *in G. Then the associated inequality*

$$x(K) \leq 2(2k+1)$$

defines a facet of P(G).

2.1.4. Separation of cycle inequalities

$x(F) - x(C \backslash F) \leq |F|-1$ for all C cycle of G and $F \subset C$, $|F|$ odd

Theorem: *The cycle inequalities can be separated in polynomial time. The separation reduces to a shortest path problem.*

The inequality above can be written as

$$\sum_{e \in F} (1 - x_e) + \sum_{e \in C \backslash F} x_e \geq 1$$

2.1.4. Séparation

For each node *i* consider two node *i'* and *i"*, and for each edge *ij* consider the edges *i'j'* and *i"j"* with weight $x(e)$ and the edges *i'j"* and *i"j'* with weight $1-x(e)$.

In the new graph we look for a shortest path between *i'* and *i"* for every node *i*. If the minimum is less than 1, then the corresponding path yields a violated cycle inequality.

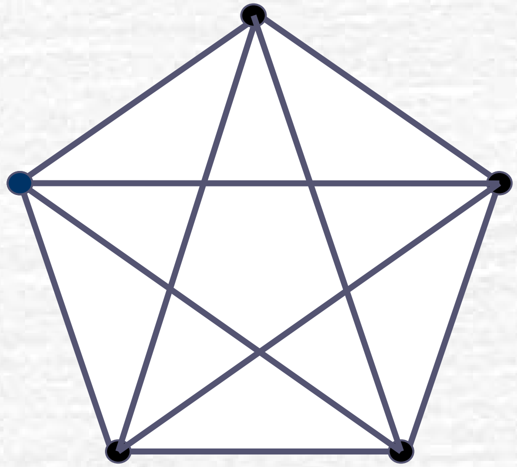
Theorem: *P(G) is given by the cycle and trivial inequalities if and only if G is noncontractible to* K_5.

Therefore the Max-Cut can be solved in polynomial time in the graphs noncontractible to K_5.

Bicycle inequalities

Theorem: (Gerards 1985) *The bicycle (2k+1)-inequalities can be separated in polynomial time. The separation reduces to a shortest odd cycle problem.*

2.1.5. Graphes sans K_5



$$\sum_{e \in K_5} x(e) \leq 6$$

est nécessaire dans la description de $P_c(K_5)$.

Définition: Un graph G est dit contractible à un graphe H si H peut être obtenu à partir de G par contraction et suppression d'arêtes.

Théorème: (Barahona, M, 1986)
$P_c(G)$ peut être décrit par les contraintes (3) et (4) si et seulement si G n'est pas contractible à K_5.

Verres de spins avec champs magnétiques

Le problème de coupe maximum est NP-complet dans les graphes presque planaires (G est presque planaire s'il existe un sommet v tel que G-v est planaire) (Barahona, 1983).

En physique, cela correspond à un verre de spins avec **un champ magnétique.**

2.1.6. Branch&Cut

5 x 5 x 5 (Barahona, Maccioni, 1982)
40 x 40 (Barahona, Grötschel, Jünger, Reinelt, 1988)
avec champ magnétique
(205 contraintes générées)
50 x 50 (Barahona, Hari, 1991)
avec champ magnétique
100 x 100 (De Simone, Diehl, Jünger, Mutzel, Reinelt, Rinaldi, 1995)

Le problème de coupe maximum a également des application en VLSI

2.1.6. Branch&Cut

Barahona, Grötschel, Jünger, Reinelt (1988):

- solved spin glass models
- considered the 2D case with exterior magnetic field (square grid with universal node)
- used particularly the cycle and trivial inequalities
- solved instances up to 40 x 40.
- also solved via minimization instances.

Barahona, Jünger, Reinelt (1989):

- solved quadratic programs
- used cycle and trivial inequalities

2.1.6. Branch&Cut

De Simone, Rinaldi (1994):

- solved spin glass models
- used cycle, trivial and the so-called hypermetric inequalities

De Simone, Diehl, Jünger, Mutzel, Reinelt, Rinaldi (1995,1996):

- solved more than 20 000 spin glass models with size up to 100 x 100 for 2D instances, and 50 x 50 with exterior magnetic field.
- used cycle, trivial and bicycle inequalities

Liers; Palassini, Hartmann, Jünger (2003):

- considered regular graphs
- used cycle, trivial and bicycle inequalities
- solve 4-regular and 6-regular with up to 1 280 nodes.

Plan

1. **Approche Polyédrale**

2. **Applications**

   2.1. Le problème de coupe maximum

   2.2. Le problème de conception d'un réseau fiable

      2.2.1. General Model

      2.2.2. Polyhedral results

      2.2.3. Valid inequalities

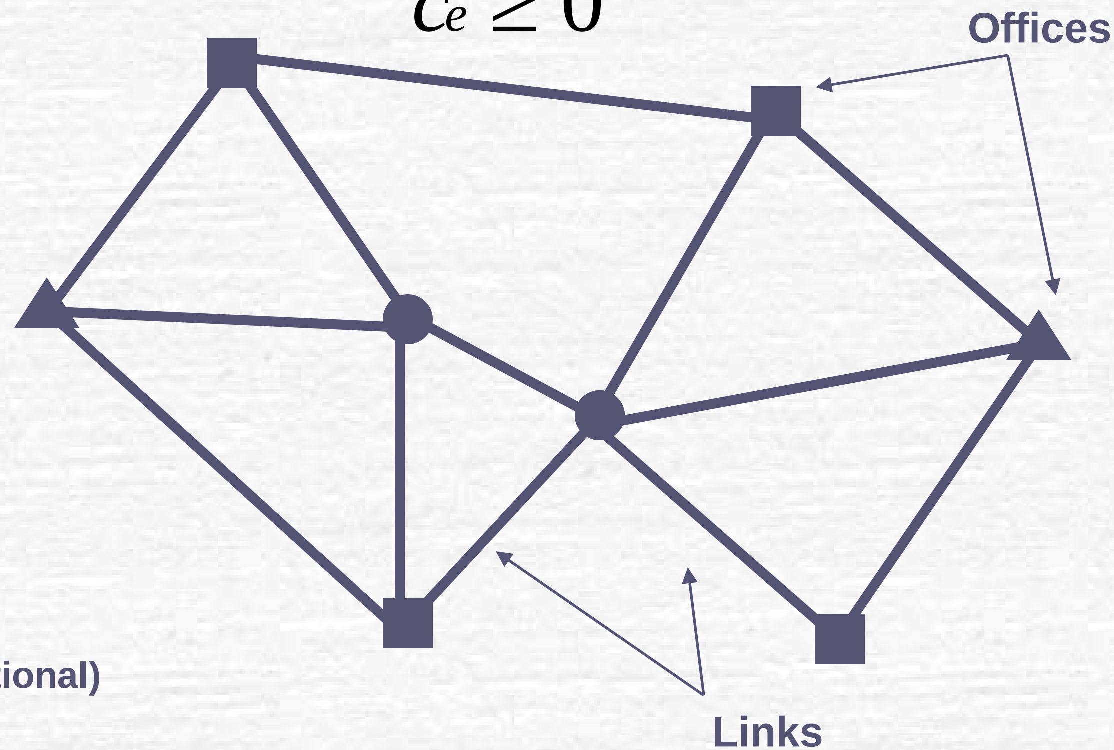
      2.2.4. Separation

      2.2.5. Critical extreme points

      2.2.6. Branch&Cut

      2.2.7. Length constraints

$$c_e \geq 0$$

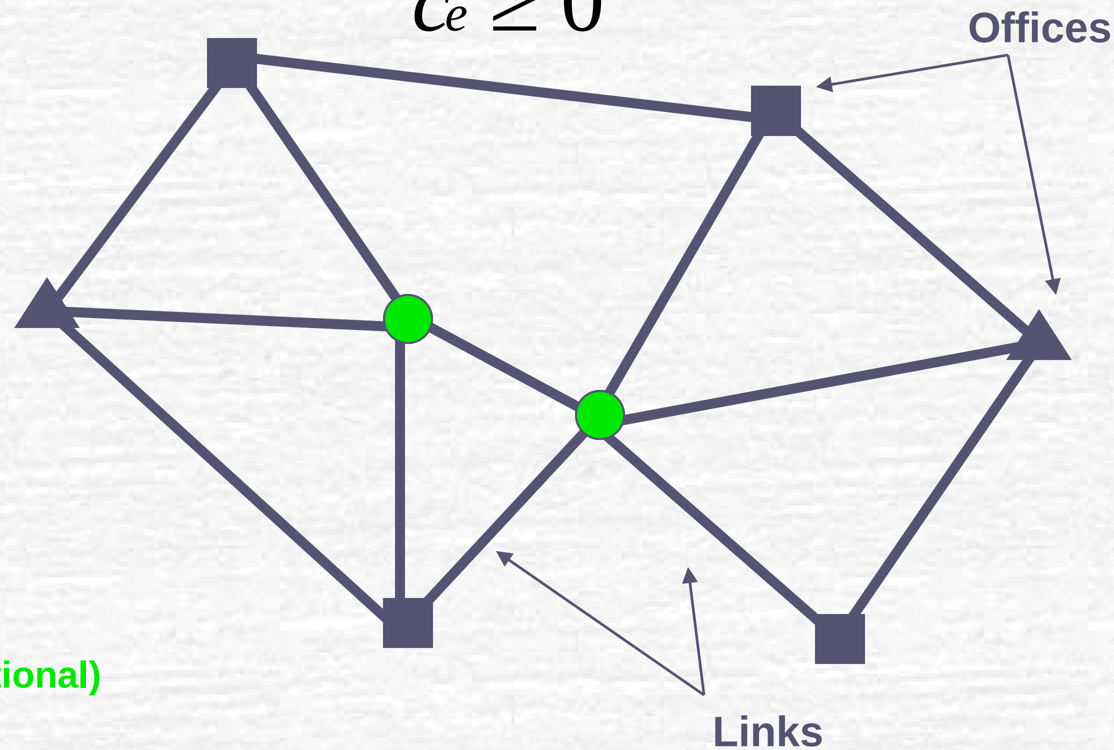


● type 0 **(optional)**

■ type 1 **(ordinary)**

▲ type 2 **(special)**

$$c_e \geq 0$$

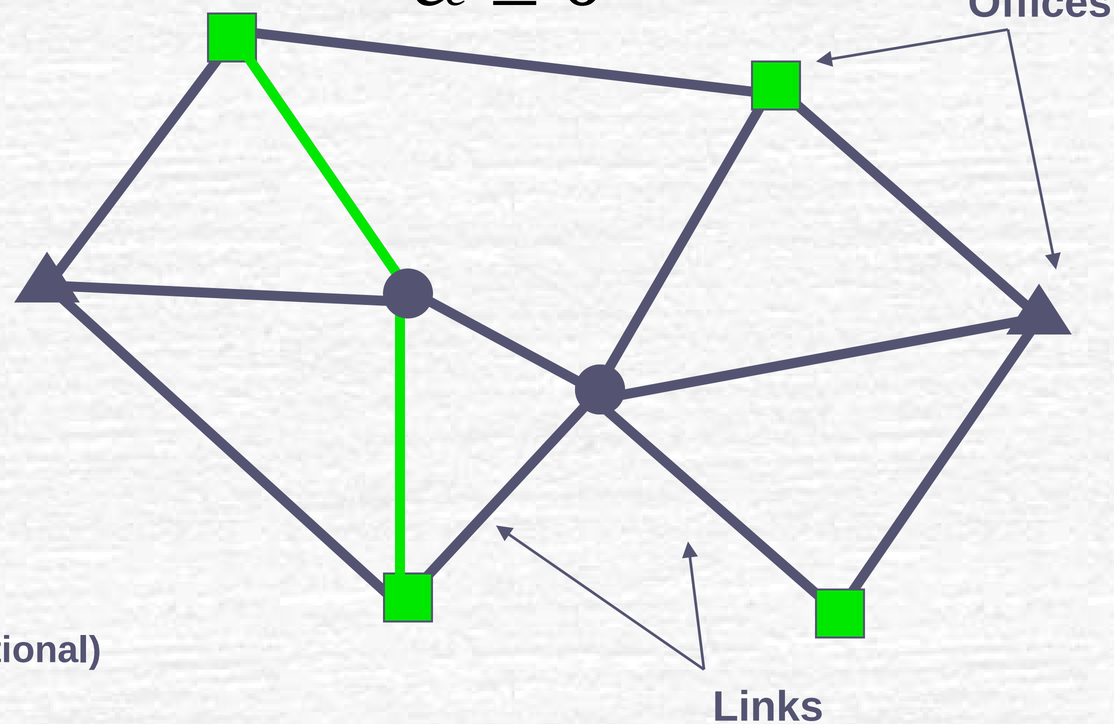


● type 0 (optional)

■ type 1 (ordinary)

▲ type 2 (special)

$c_e \geq 0$

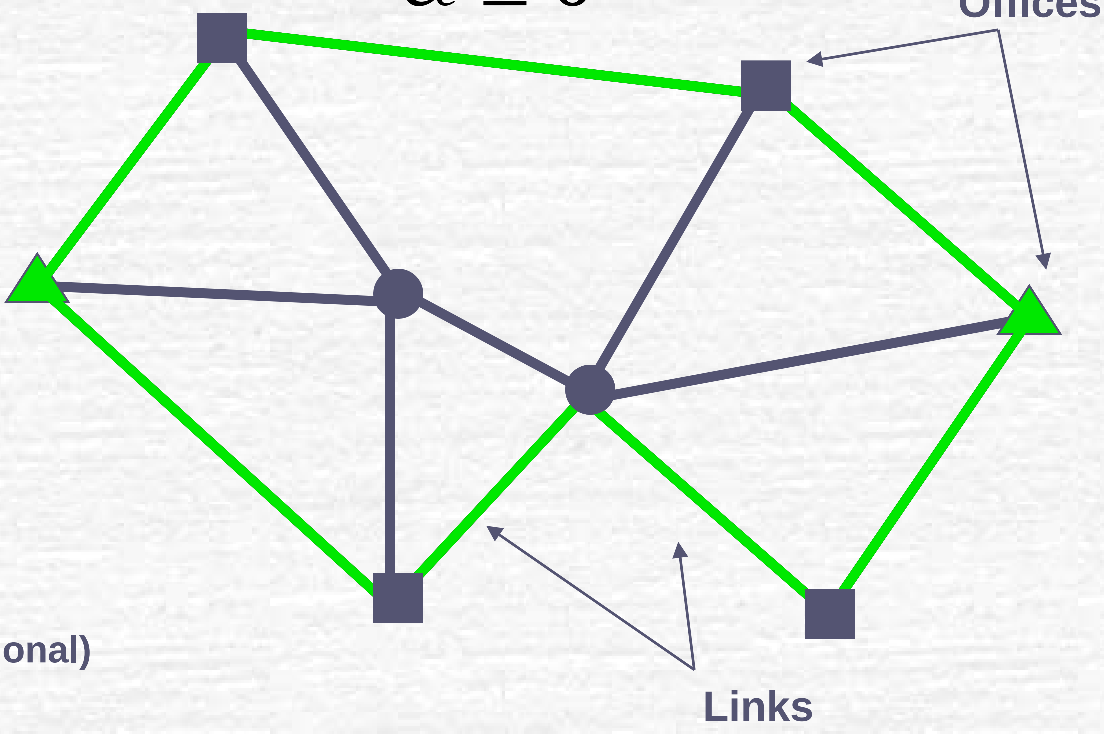


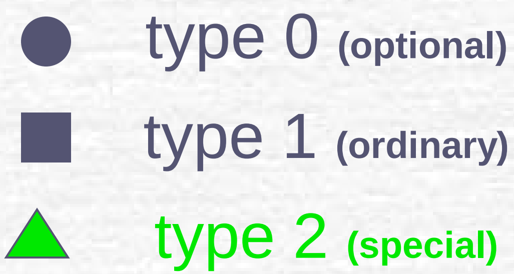
type 0 **(optional)**

type 1 **(ordinary)**

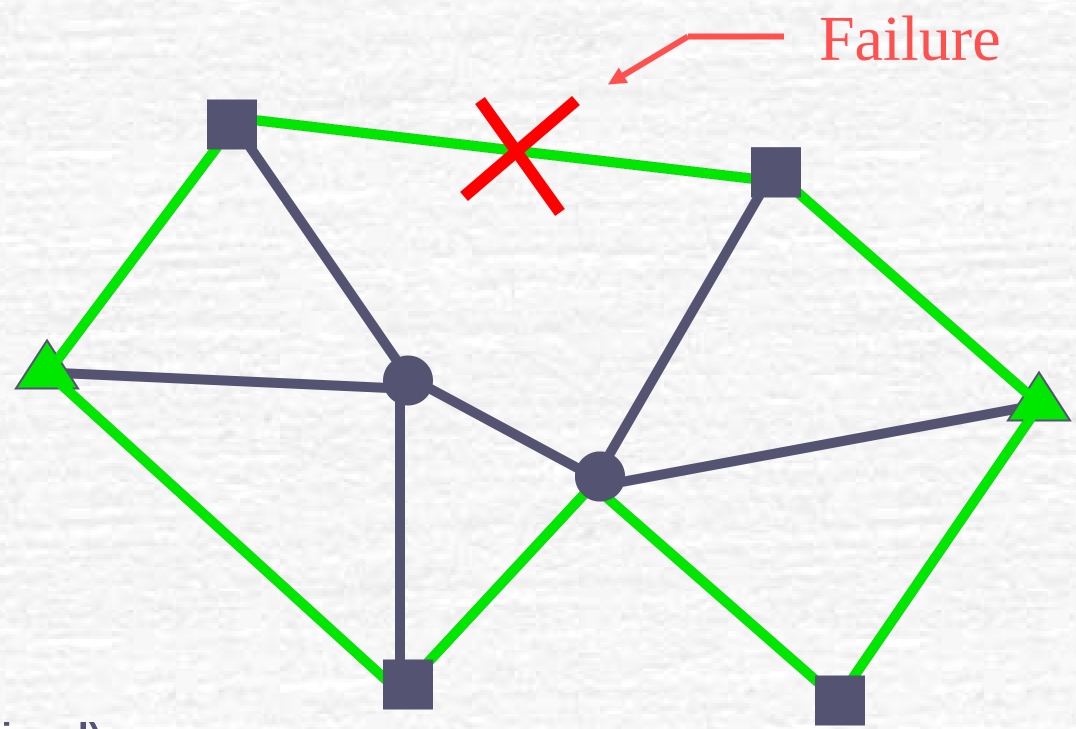
type 2 **(special)**

$c_e \geq 0$


Offices
Links


type 0 (optional)
type 1 (ordinary)
type 2 (special)

2.2. Network survivability



- type 0 **(optional)**
- type 1 **(ordinary)**
- type 2 **(special)**

2.2.1. A General Model

Let $G=(V,E)$ be a graph. If s is a node of G, we associate with s a connectivity type $r(s)\in N$.

If s,t are two nodes, let

$$r(s,t)=min(r(s),r(t))$$

G is said to be survivable if for every pair of nodes s,t, there are at least $r(s,t)$ edge (node)-disjoint paths between s and t.

(Grötschel, Monma, Stoer (1992))

The Survivable Network Design Problem (SNDP)

Given weights on the edges of G, find a minimum weight survivable subgraph of G.

Special cases:

- $r(v)=1$ for every v: the minimum spanning tree problem.

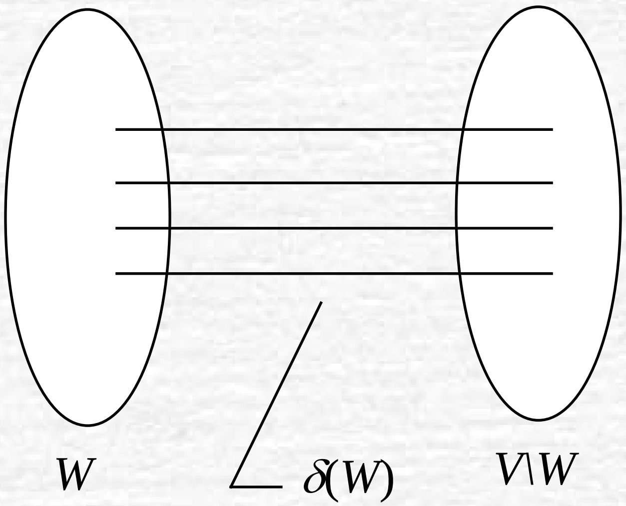
- $r(v)=1$ for two nodes s,t and 0 elsewhere: the shortest path problem between s and t.

- $r(v) \in \{0,1\}$ for every v: the Steiner tree problem.

- $r(v)=k$ for every v (k fixed): the k-edge (k-node) connected subgraph problem .

The SNDP is NP-hard in general.

Formulation of the SNDP (edge case)



If $W \subset V$, $\emptyset \neq W \neq V$, let
$r(W) = \max\{r(s) \mid s \in W\}$
$con(W) = \min\{r(W), r(V \backslash W)\}$

$r(W)$ is the connectivity type of W.

$\delta(W)$ is called a *cut* of G.

$$\sum_{e \in \delta(W)} x(e) = x(\delta(W)) \geq con(W)$$

cut inequalities

The (edge) SNDP is equivalent to the following integer program

$$\min \sum_{e \in E} c(e)x(e)$$

Subject to

$$x(\delta(W)) \geq con(W) \qquad \text{for all } W \subset V,\ \emptyset \neq W \neq V$$

$$0 \leq x(e) \leq 1 \qquad \text{for all } e \in E,$$

$$x(e) \in \{0,1\} \qquad \text{for all } e \in E.$$

Follows from Menger's theorem (1927).

$$\min \sum_{e\in E} c(e)x(e)$$

Subject to

$x(\delta(W))\geq con(W)$ for all $W\subset V$, $\emptyset \neq W \neq V$

$0\leq x(e)\leq 1$ for all $e \in E$,

The linear relaxation can be solved in polynomial time (by the ellipsoid method).

2.2.2. Polyhedral Results

Let SNDP(G) be the convex hull of the solutions of SNDP, *i.e.*

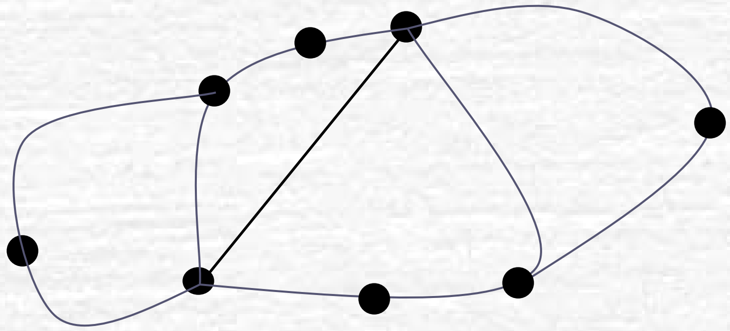
$$\text{SNDP}(G) = conv\{x \in R^E \mid x \text{ is a (an integer) solution of SNDP}\}.$$

SNDP(G) is called the survivable network design polyhedron.

Restricted graphs

A graph is said to be series-parallel if it can be constructed from an edge by iterative application of the following operations:

1) *Addition of parallel edges*
2) *Subdivision of edges*



Theorem: (Kerivin & M. (2002))
If G is series-parallel and r(v) is even for every v, then SNDP(G) is given by the trivial and the cut inequalities.

Generalizes Cornuéjols, Fonlupt and Naddef (1995), Baïou & M. (1996), Didi-Biha & M. (1999).

Corollary:
If G is series-parallel and r(v) is even for every v, then SNDP can be solved in polynomial time.

k-Connectivity with *k* odd

Let $(V_1,\ldots,V_p)$ be a partition of V. Chopra (1994) showed that

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq \lceil k/2 \rceil p-1 \qquad (1)$$

is valid for the SNDP(G) when G is outerplanar (a subclass of series-parallel graphs), k is odd and an edge can be used more than once. Here $\delta(V_1,\ldots,V_p)$ is the set of edges between the V_i's.

Theorem: Chopra (1994)

If G is outerplanar, k odd and multiple eges are allowed, then the k-edge connected polyhedron is given by inequalities (1) and $x(e) \geq 0$ for all e.

Generalized by Didi Biha & M. (1996) to series-parallel graphs (with and without possibility of multiple copies of edges) .

2.2.3. Valid inequalities

Low connectivity case: $r(v) \in \{0,1,2\}$

Trivial inequalities:

$$0 \leq x(e) \leq 0 \quad \text{for all } e \in E$$

Cut inequalities:

$$x(\delta(W)) \geq con(W) \qquad \text{for all } W \subset V, \emptyset \neq W \neq V$$

Partition inequalities:

Let $V_1,\ldots,V_p$, $p \geq 2$, be a partition of V such that $con(V_i) \geq 1$ for all V_i. Then the following inequality is valid for SNDP(G).

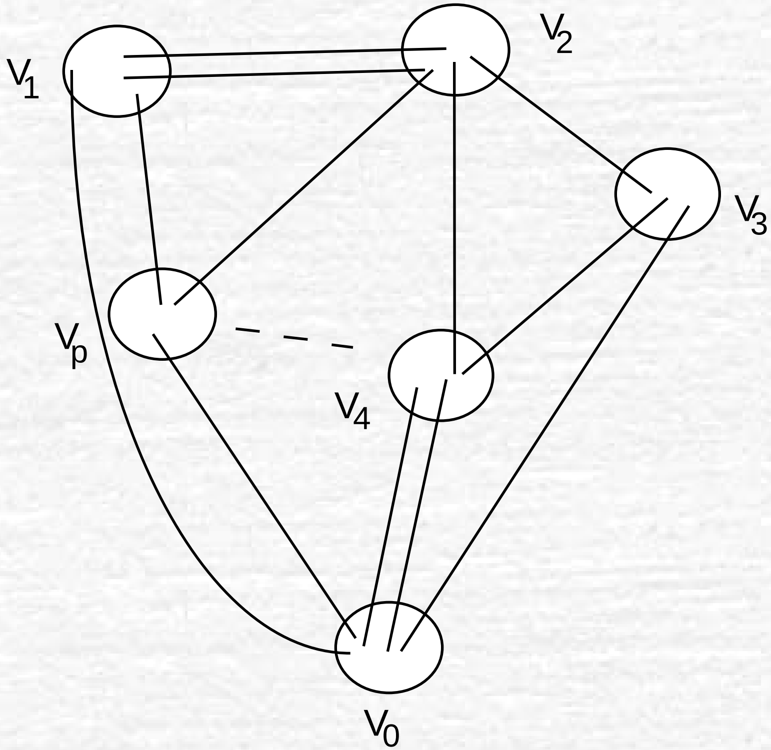
$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq p-1, \quad \text{if } con(V_i)=1 \text{ for all } V_i$$

$$\geq p, \quad \text{if not,}$$

(Grötschel, Monma and Stoer (1992))

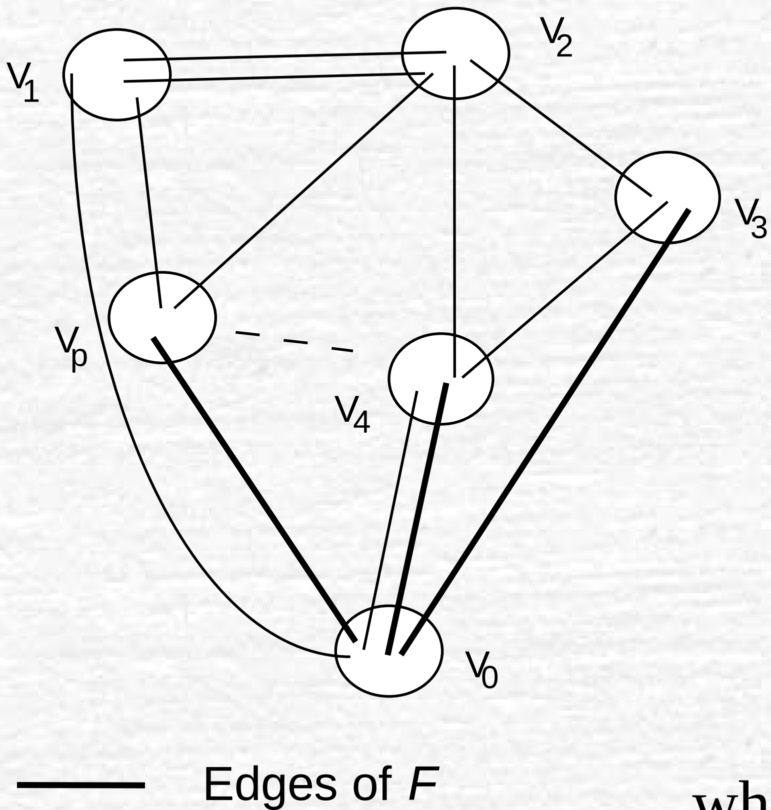
F-partition inequalities:

Let $V_0, V_1, \ldots, V_p$ be a partition of V such that $con(V_i)=2$ for all V_i



F-partition inequalities:

Let $V_0, V_1, \ldots, V_p$ be a partition of V such that $con(V_i)=2$ for all V_i



Let F be a set of edges of $\delta(V_0)$ and $|F|$ id odd.

$$x(\delta(V_i)) \geq 2, \qquad i=1,\ldots,p$$

$$-x(e) \geq -1, \qquad e \in F$$

$$x(e) \geq 0, \qquad e \in \delta(V_0) \setminus F$$

$$\Rightarrow \qquad 2x(\Delta) \geq 2p - |F|,$$

where $\Delta = \delta(V_0, V_1, \ldots, V_p) \setminus F$

Then

$$x(\Delta) \geq p - \frac{|F| - 1}{2}$$

is valid for the SNDP(G).

These inequalities are called *F-partition inequalities.* (M. (1994))

Further valid inequalities related to the traveling salesman polytope have been given by Boyd & Hao (1994) for the 2-edge connected subgraph polytope. And general valid inequalities for the SNDP have been introduced by Grötschel, Monma and Stoer (1992) (generalizing the *F*-partition inequalities).

2.2.4. Separation

F-partition inequalities

($r(v)$ =2 for all node v)

Theorem. (Barahona, Baïou & M.) *If F is fixed, then the separation of F-partition inequalities can be solved in polynomial time.*

Let $G'=(V',E')$ be the graph obtained by deleting the edges of F. Hence the F-partition inequalities can be written as

$$x(\delta(V_0,\ldots,V_p)) \geq p-(|F|-1)/2$$

where $(V_0,\ldots,V_p)$ is a partition of V' such that for each edge $uv \in F$, $|\{u,v\} \cap (V_0)|=1$.

There are $2^{|F|}$ possibilities for assigning these nodes.

For each possibility we contract the nodes that must be in V_0 and solve the separation problem for the inequalities.

$$x(\delta(V_0,\ldots,V_p)) \geq p-(|F|-1)/2$$

where $|F|$ is fixed. These are partition inequalities, and hence the separation can be done in polynomial time.

Partition inequalities

These inequalities can be written as

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq p\text{-}1, \quad \text{if } con(V_i)=1 \text{ for all } V_i$$
$$\geq p, \quad \text{if not,}$$

For any partition $(V_1,\ldots,V_p)$ of V.

If $r(v) \in \{0,1,2\}$, the separation problem is NP-hard (Grötcshel, Monma, Stoer (1992)).

Theorem: (Kerivin, M. (2002)) *The separation of the partition inequalities when $r(v) \in \{1,2\}$ for all v can be done in polynomial time.*

The separation reduces to minimizing a submodular function. (A function f: 2^V ----> R is said to be *submodular* if

$$f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B), \text{ for all } A, B \subset V.$$

Recently Barahona and Kerivin (2004) showed that the problem reduces to $O(|V|^4)$ minimum cut problems.

2.2.5. Critical extreme points of the 2-edge connected subgraph polytope

(Fonlupt & M. (1999))

We suppose *r(v)*=2 for all *v*.

Consider the linear relaxation of the problem:

$$\min \sum_{e\in E} c(e)x(e)$$

$$x(\delta(W)) \geq 2 \qquad \text{for all } W \subset V,\ \emptyset \neq W \neq V$$

$$0 \leq x(e) \leq 1 \qquad \text{for all } e \in E.$$

2.2.5. Critical extreme points of the 2-edge connected subgraph polytope

(Fonlupt & M. (1999))

We suppose *r(v)*=2 for all *v*.

Consider the linear relaxation of the problem:

$$\min \sum_{e \in E} c(e)x(e)$$

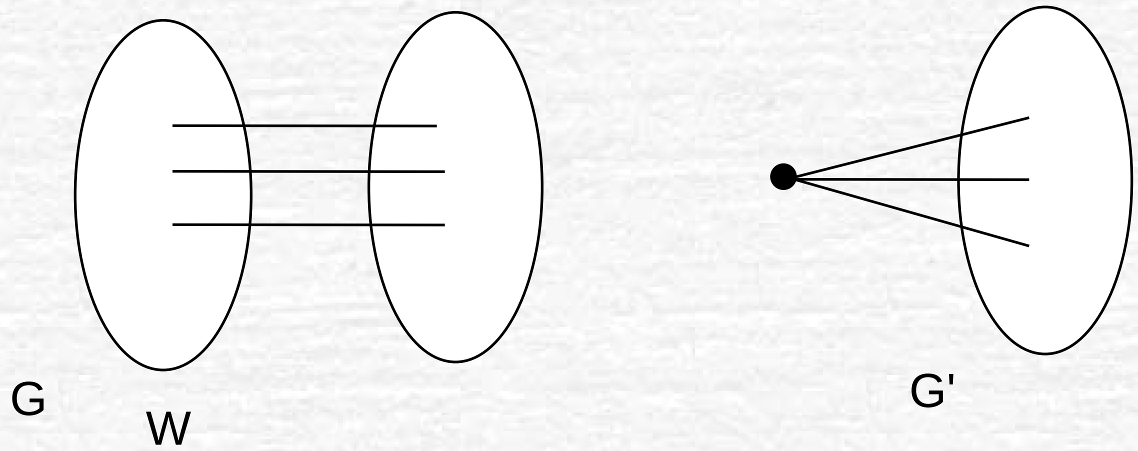
$$P(G) \quad \boxed{\begin{array}{ll} x(\delta(W)) \geq 2 & \text{for all } W \subset V,\ \emptyset \neq W \neq V \\ 0 \leq x(e) \leq 1 & \text{for all } e \in E. \end{array}}$$

Reduction Operations

Let x be a fractional extreme point of $P(G)$.

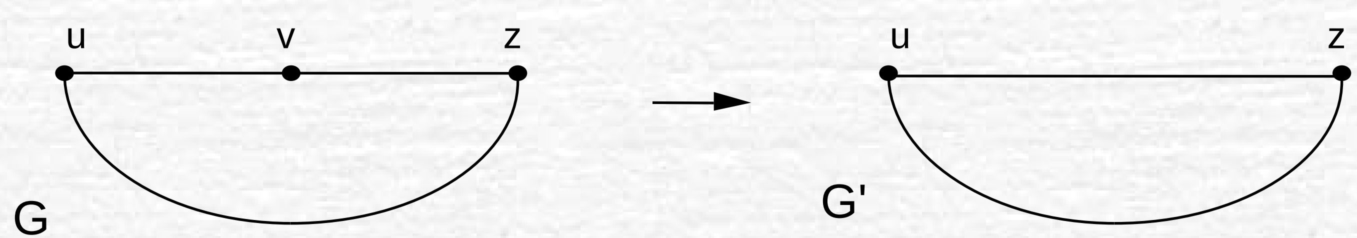
O_1: delete edge e such that $x(e)=0$,

O_2: contract a node set W such that the subgraph induced by W, $G(W)$ is 2-edge connected and $x(e)=1$ for every $e \in E(W)$.



$G(W)$ is 2-edge connected
and $x(e)=1$ for every $e \in E(W)$.

O_3: contract an edge having one of its endnodes of degree 2.



Lemma: *Let x be an extreme point of P(G) and x' and G' obtained from x and G by applications of operations O_1, O_2, O_3. Then x' is an extreme point of P(G'). Moreover if x violates a cut, a partition or an F-partition inequality, then x' so does.*

Domination

Let x and y be fractional two extreme points of $P(G)$. Let F_x={$e \in E$ | $x(e)$ is fractional} and F_y={$e \in E$ | $y(e)$ is fractional}.

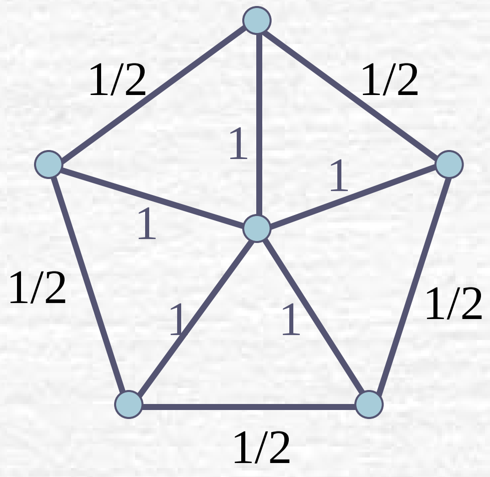
We say that x dominates y if $F_y \subset F_x$.

Question:

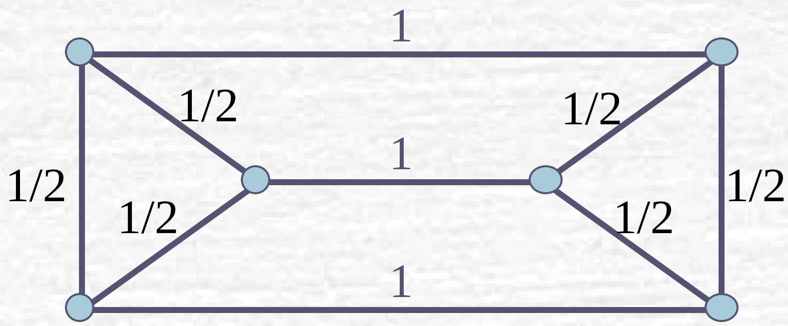
Characterise the minimal fractional extreme points.

Definition : A fractional extreme point *x* of *P(G)* is said to be *critical* if:
1) none of the operations O_1, O_2, O_3 can be applied for it,
2) it does not dominate any fractional extreme point of *P(G)*.

Example:



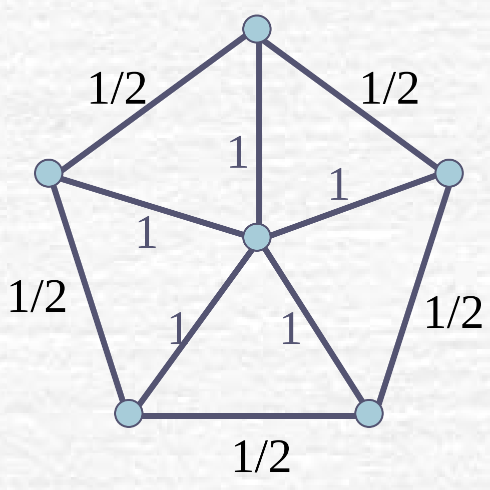
Critical



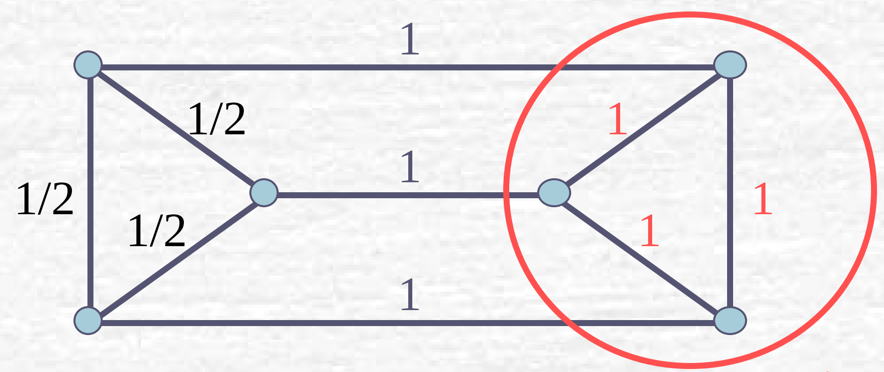
Non-critical

Definition : A fractional extreme point *x* of *P(G)* is said to be *critical* if:
1) none of the operations O_1, O_2, O_3 can be applied for it,
2) it does not domine any fractional extreme point of *P(G)*.

Example:



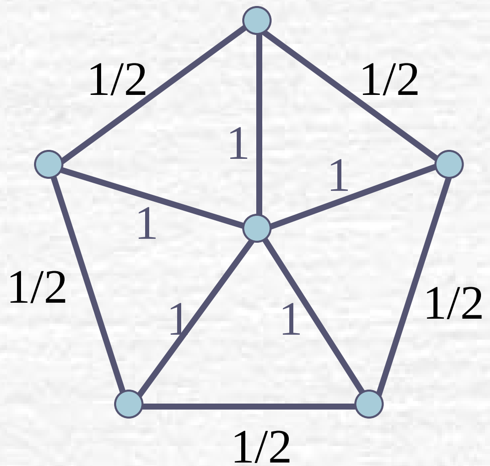
Critical



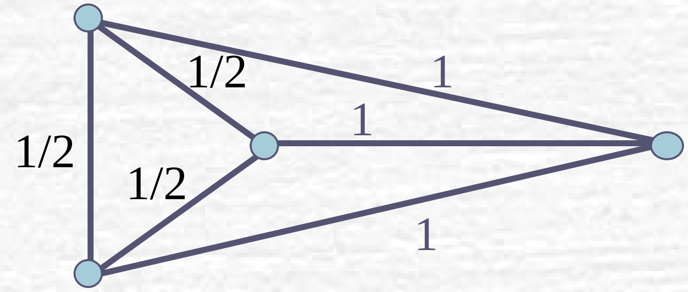
Non-critical

Definition : A fractional extreme point *x* of *P(G)* is said to be *critical* if:
1) none of the operations O$_1$, O$_2$, O$_3$ can be applied for it,
2) it does not domine any fractional extreme point of *P(G)*.

Example:



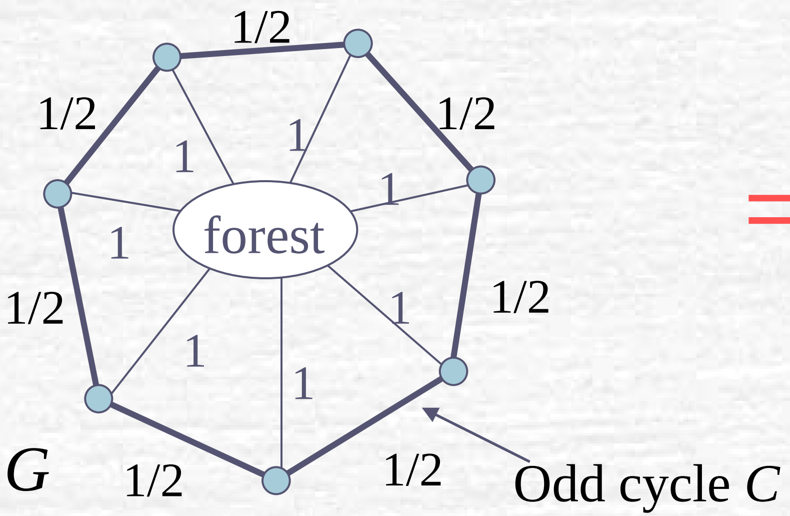
Critical



Extreme point

Critical

Theorem: *An extreme point of P(G) is critical if and only if G and x are of the following form:*



$$\Rightarrow \quad \sum_{e \in C} x(e) \geq \frac{|C|+1}{2}$$

is valid and defines a facet

(it is an *F*-partition inequality)

Theorem: *If x is a critical extreme point of P(G), then x can be separated (in polynomial time) by an F-partition inequality.*

The concept of critical extreme points has been extended (with respect to appropriate reduction operations) to 2-node connected graphs and (1,2)-survivable networks (Kerivin, M., Nocq (2001)), And to *k*-edge connected graphs (Didi Biha & M. (2004)).

2.2.6. Branch&Cut algorithm

(Kerivin, Nocq, M. (2001))

$r(v) \in \{1,2\}$ for all v

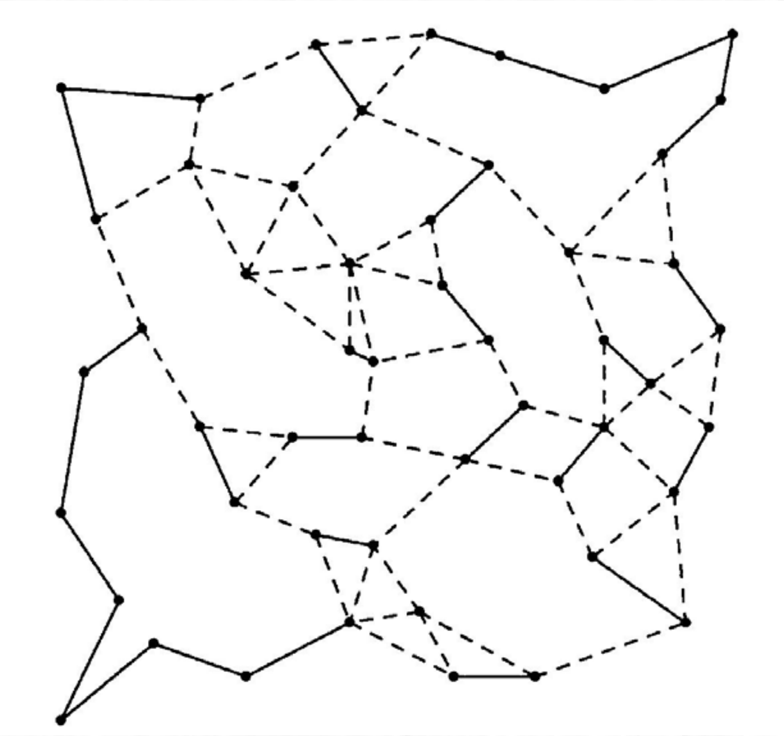
Used constraints:

trivial inequalities
cut inequalities
F-partition inequalities
partition inequalities

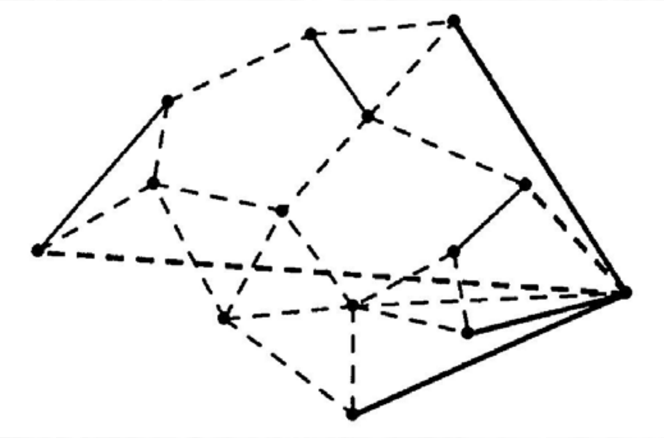
If *x* is a fractional extreme point (critical or not), we apply the reduction operations. Let *G'* and *x'* be the graph and the solution thus obtained.

If a cut, a partition or an *F*-partition constraint is violated by *x'* for *G'*, then it can be lifted to a constraint of the same type violated by *x* for *G*.

2.2.6. Branch&Cut



G 51 nodes



G' 14 nodes

 F

$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)\backslash F)\geq 11$

This contraint cuts the extreme point of *G'* and that of *G*.

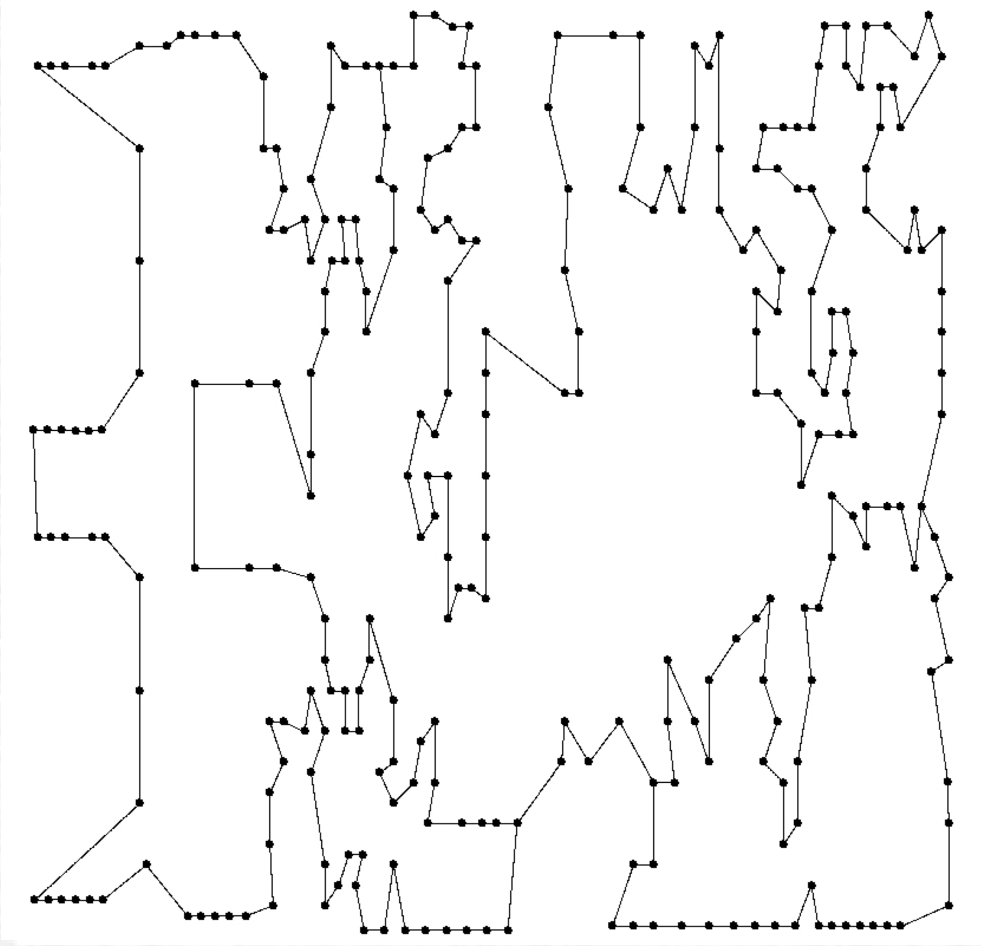
2.2.6. Branch&Cut

#nodes 299 (type 2)

#variables 44551

#constraints 357

CPU Time 142 sec



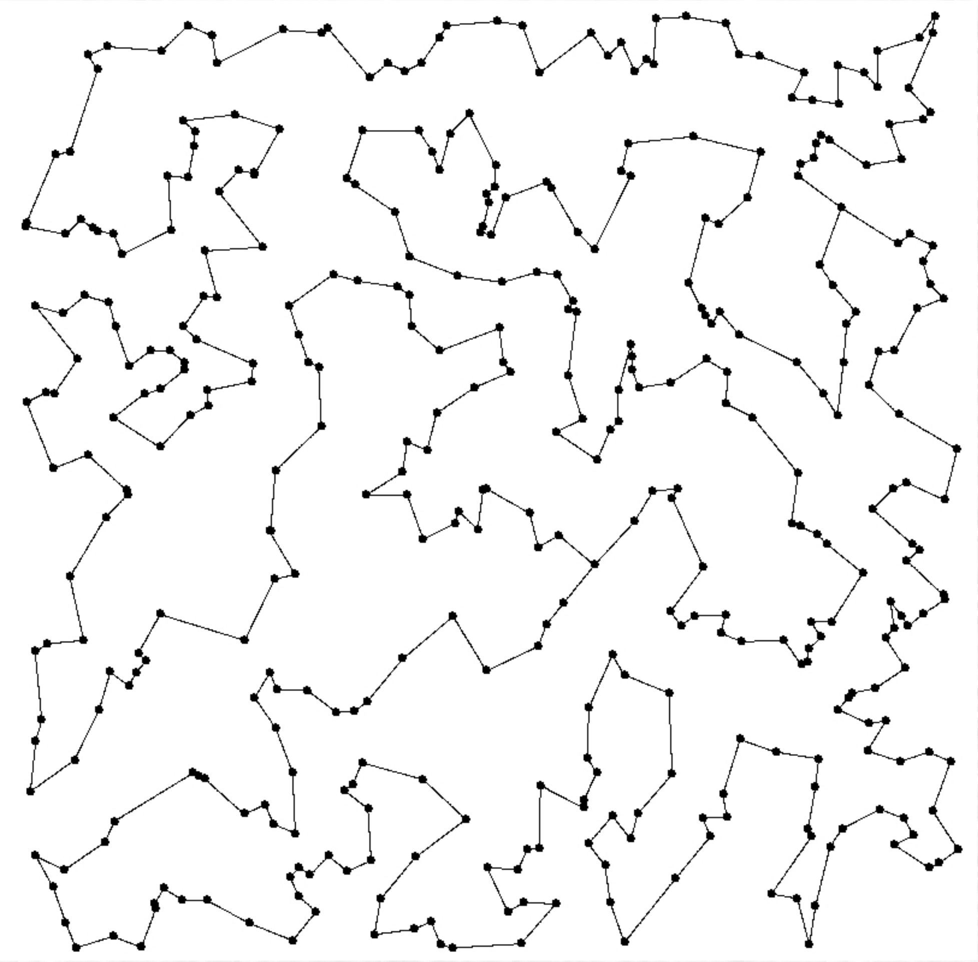
2.2.6. Branch&Cut

#nodes 400
(type 2)
2-node connected

#variables 79400

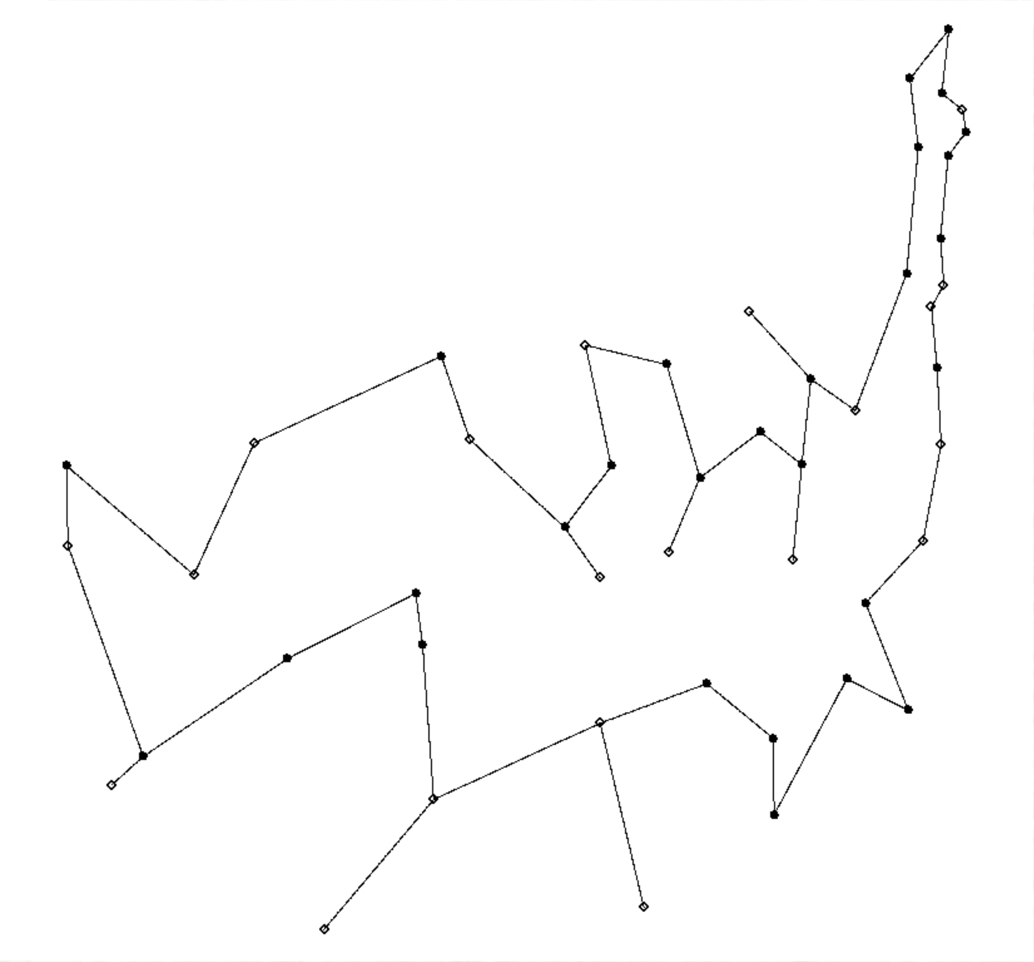
#constraints 1369

CPU Time 152 min



2.2.6. Branch&Cut

#nodes		**48**
	#type 1	**20**
	#type 2	**28**
#variables		**1 128**
#constraints		**428**
CpuTime		**202 sec**



2.2.7. Survivable networks with length constraints

Motivation: to have effective routing cost

Local rerouting:

Each edge must belong to a bounded cycle (ring).

SONET/SDH networks

End-to-end rerouting:

the paths between the terminals should not exceed a certain length (a certain number of hops) (hop-constrained paths).

ATM networks, INTERNET

Bounded rings

2-node connected graphs

Fortz, Labbé, Maffioli (1999)
Fortz, Labbé (2002)

Valid inequalities
Separation algorithms
Lower bounds on the optimal value
Cutting plane algorithms

2-edge connected graphs

Fortz, M., McCormick, Pesneau (2003)

Hop-constrained paths

The minimum hop constrained spanning tree problem

Determine a minimum spanning tree such that the number of links between a root node and any node in the tree does not exceed a bound L.

(NP-hard (even for *L*=2))

Multicommodity flow formulation
Lagrangean relaxations

Gouveia (1998)
Gouveia & Requejo (2001)
Gouveia & Magnanti (2000)

The minimum hop-constrained path problem

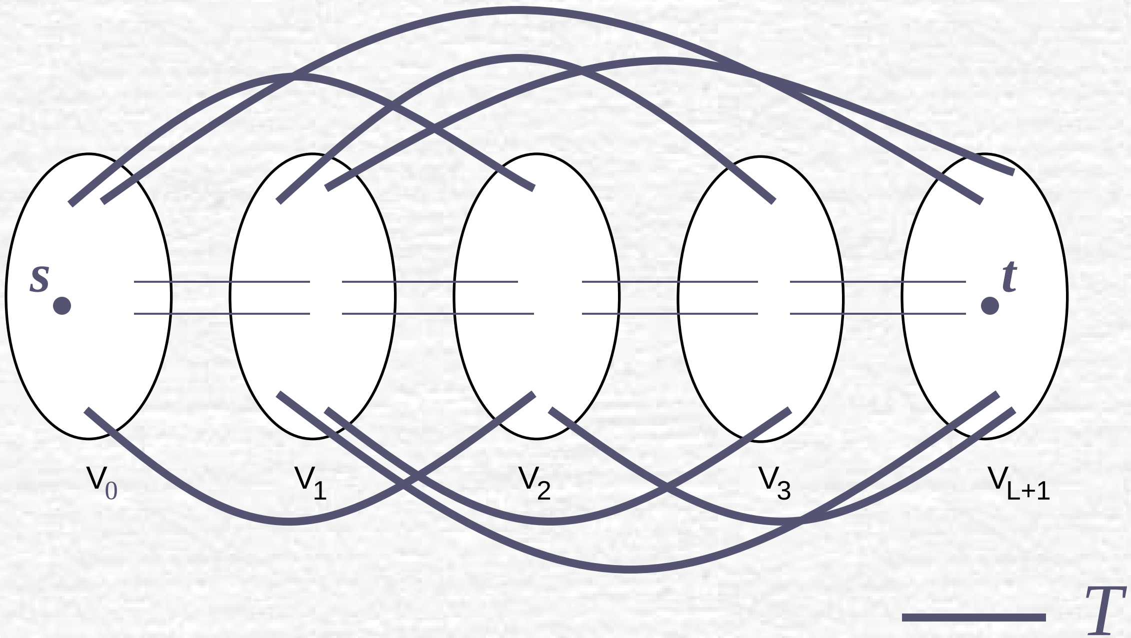
Determine a minimum path between two given nodes s and t, of length no more than L (L fixed).

Dahl & Gouveia (2001)

Formulation in the natural space of variables
Valid inequalities
Description of the associated polytope when L=2,3.

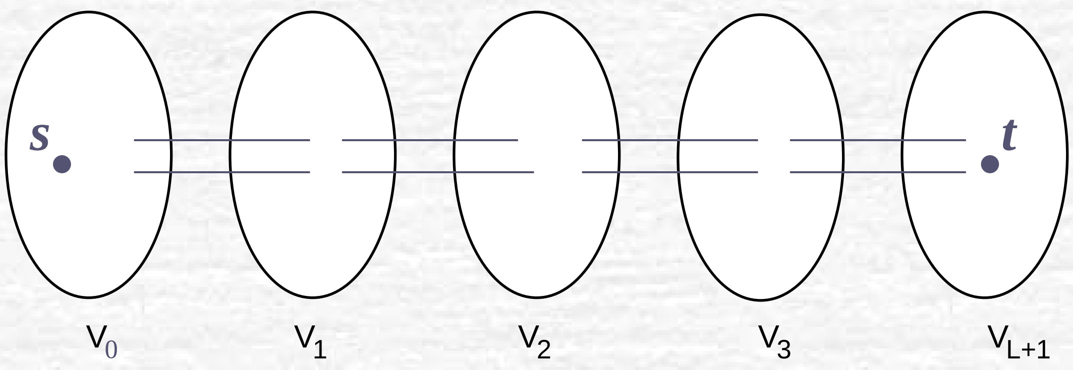
The L-star inequalities (Dahl (1999))

Let $V_0, V_1, \ldots, V_{L+1}$ be a partition of V such that $s \in V_0$ and $t \in V_{L+1}$.



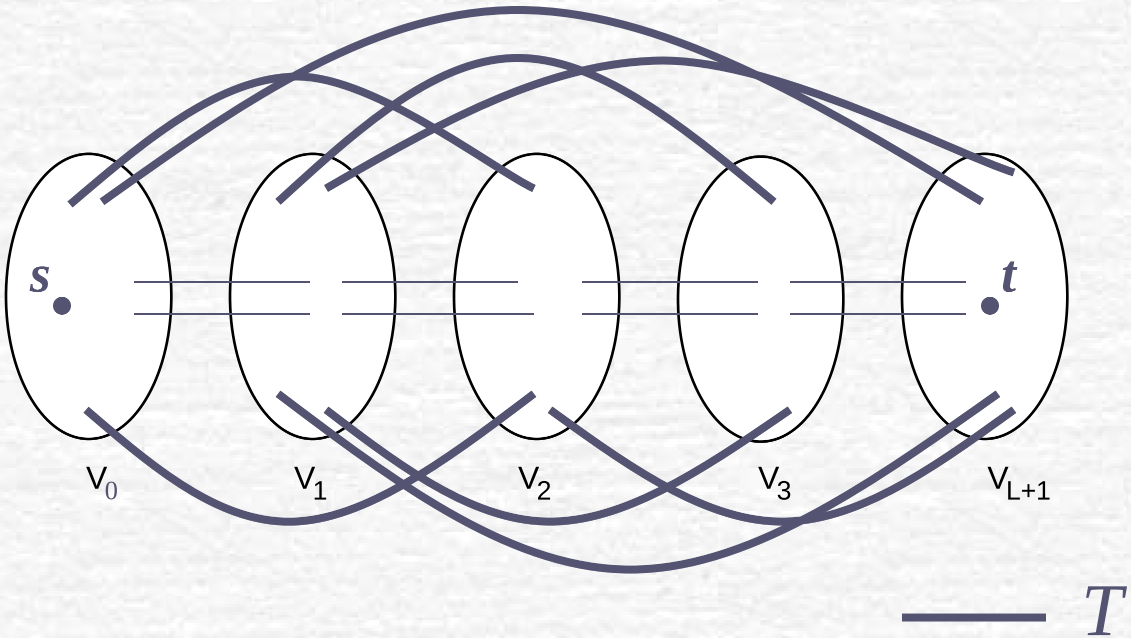
The L-star inequalities (Dahl (1999))

Let $V_0, V_1, \ldots, V_{L+1}$ be a partition of V such that $s \in V_0$ and $t \in V_{L+1}$.



The *L*-star inequalities (Dahl (1999))

Let $V_0, V_1, \ldots, V_{L+1}$ be a partition of V such that $s \in V_0$ and $t \in V_{L+1}$.



$x(T) \geq 1$

(*L*-star inequalities)

<u>Theorem:</u> (Dahl (1999))
The L-star inequalities together with the cut inequalities (separating s and t) and the trivial inequalities completely describe the L-path polyhedron when $L \leq 3$.

If at least K paths are required between s and t, *then*

$$x(T) \geq K$$

is valid for the corresponding polytope.

The separation problem for the L-star inequalities can be solved in polynomial time, if $L \leq 3$.

Fortz, M., McCormick, Pesneau (2003)

The hop-constrained network design problem (HCNDP):

Given a graph with weights on the edges, a set of terminal-pairs (origines-destinations), two intgers K, L, find a minimum weight subgraph such that between each pair of terminals there are at least K paths of length no more than L.

K=1, L=2 (Dahl, Johannessen (2000))

Formulation of the problem
Valid inequalities
Greedy approximation algorithms
Cutting plane algorithm

K=2, L=3, and only one pair of terminals

Huygens, M., Pesneau (2003)

Formulation of the problem
Complete description of the associated polytope by the trivial, the cut and the L-star inequalities

$\Rightarrow$ a polynomial time cutting plane algorithm for the problem (when K=2, L=3)

No formulation (using the design variables) is known for the problem when $K = 2$ and $L = 4$.

Conclusion

- The Survivable network design problems are difficult to solve (even special cases).

- The problems with length constraints remain the most complicated SNDP. A better knowledge of their facial structure would be usefull to establish efficient cutting plane techniques.

- The capacitated SNDP needs more investigation, from both the algorithmic and polyhedral points of view.

- Develop usefull cutting plane and column generation techniques for the very general model with length constraints, capacity assignment and routing...?